

Über Involution

Harmonische Lage von vier Punkten

Kehren wir noch einmal zum Wachstumsmass zurück. Wir hatten gesehen, dass sich die strömende Bewegung von Punkten gegen zwei Fixpunkte staut. Man kann das Wachstumsmass auch so ausführen, dass jeder Projektionsschritt von der einen Seite eines Fixpunktes aus auf die andere Seite springt. Die beiden Fixpunkte werden dann sozusagen rhythmisch umspielt und man nähert sich ihnen abwechselnd von beiden Seiten an oder man entfernt sich von ihnen. Man erreicht das dadurch, dass man die beiden Projektionspunkte Q und Q' , deren Verbindungsgerade ja durch den Punkt U läuft, so legt, dass sie durch die zweite durch O gehende Gerade getrennt werden. Abbildung 1a zeigt den grundsätzlichen Aufbau einer solchen Konstruktion, in Abbildung 1b ist diese einige Schritte weitergeführt. Man bewegt sich nun abwechselnd auf der im Endlichen liegenden Strecke zwischen O und U und auf der durch das Unendliche gehenden. Man muss also nicht mehr neu ansetzen, um von dem einen Teil der Geraden in den anderen zu gelangen. Was gleich bleibt, ist die Stauung, die eintritt, wenn man sich auf die Fixpunkte O und U zubewegt. Wiederum kann man beliebig nahe an sie heran, aber nicht in sie hinein. Die Bewegungsgeste der Punkte entspricht derjenigen, die wir bereits im letzten Kapitel betrachtet hatten, wenn man auf die fertige Zeichnung sieht: Entfernt sich der projizierte Punkt von O bzw. U , so werden seine Schritte grösser, nähert er sich an, so verkleinert er gleichzeitig seine Schritte. Nur entstehen die Schritte, die der Punkt macht, nun eben nicht in der gleichen Reihenfolge, die man vor sich hat, wenn man die Zeichnung betrachtet. Der Rhythmus des Projizierens übernimmt aber die Geste des enger und weiter Werdens.

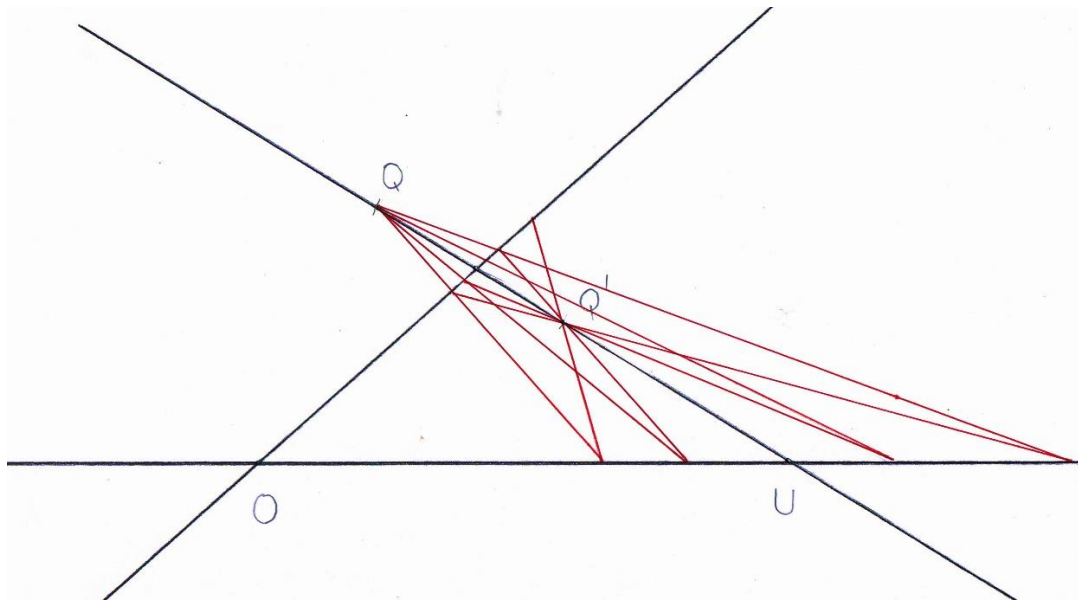


Abbildung 1a

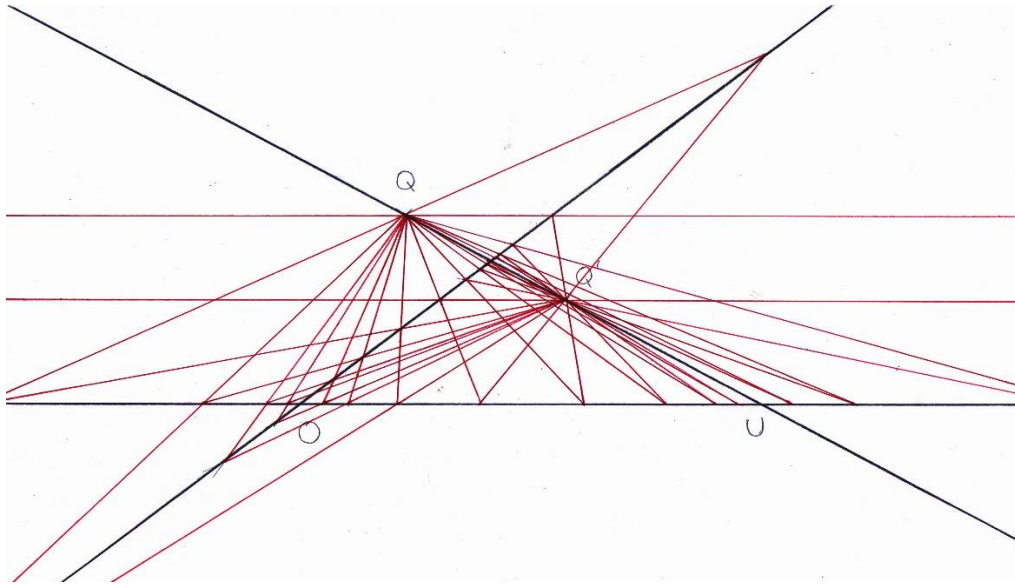


Abbildung 1b

Abgesehen von den oben beschriebenen Bedingungen hatten wir bis jetzt die Punkte Q und Q' willkürlich gesetzt. Hebt man diese Willkür auf, so ergibt sich ein erstaunliches Phänomen: Wir wollen nun die Punkte Q, Q' und U, sowie den Schnittpunkt, der zwischen Q und Q' liegt, in eine besondere, harmonische Lage bringen. Die harmonische Lage von vier Punkten ermittelt man, indem man Streckenverhältnisse zueinander in Beziehung setzt. Nicht die absolute Länge einer einzelnen Strecke ist hierbei von Interesse. Setzt man vier Punkte auf einer Geraden und bezeichnet sie (in dieser Reihenfolge) mit A, B, C und D, so gilt folgendes: Wenn die Strecke AB im Verhältnis zur Strecke BC gleich ist zur Strecke AD im Verhältnis zur Strecke CD, so liegen die vier Punkte harmonisch. $AB/BC = AD/CD$. Wenn beispielsweise der Abstand von A zu B 3 Einheiten beträgt und derjenige von B zu C 1 Einheit, so muss, bei harmonischer Lage der Abstand von B zu C 2 Einheiten betragen. Der Abstand von A zu D ist dann 6 und es ergibt sich: $3/1 = 6/2$. In der Abbildung 2a liegen die Punkte A, B, C und D in dieser Weise harmonisch. Die harmonische Lage ist aber unabhängig von ganzzahligen Verhältnissen. Nimmt man an, dass die Punkte A und C fix sind und die Punkte B und D beweglich, so lässt sich für jede Lage des Punktes B zwischen A und C ein Punkt D so ermitteln, dass die vier Punkte harmonisch liegen.

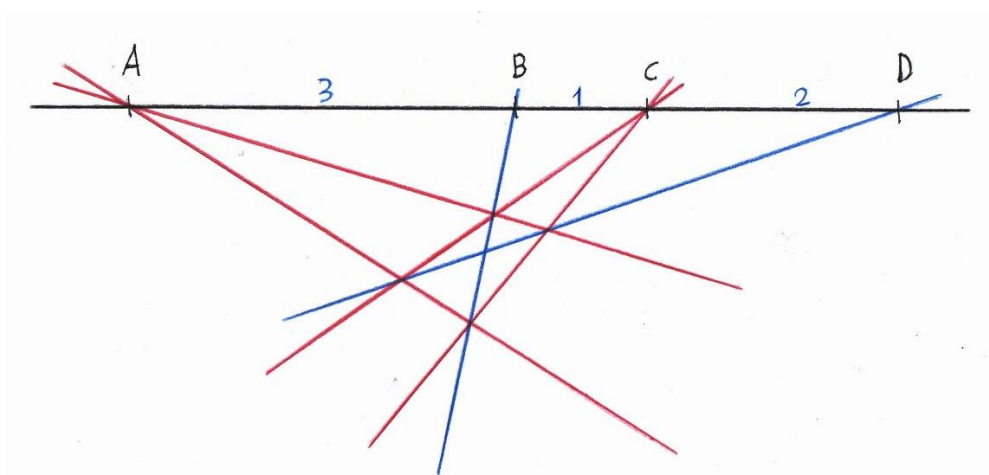


Abbildung 2a

Möchte man vier Punkte in harmonischer Lage haben, so gibt es neben der Berechnung eine sehr einfache geometrische Konstruktion, die zum selben Ergebnis führt. Diese ist in Abbildung 2a ebenfalls ausgeführt: Man zeichnet ein beliebiges Vierseit, die vier Seiten sind in Abb. 2a rot dargestellt. Je zwei gegenüberliegende Seiten schneiden sich in einem der Punkte A oder C. Man zieht die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte (schwarz) und ergänzt das Vierseit um seine beiden Diagonalen (blau). Die Schnittpunkte dieser Diagonalen mit der schwarzen Geraden ergeben die Punkte B und D. Ein solcher harmonischer Punktwurf wird durch jedes beliebige Vierseit, unabhängig von irgendeiner Regelmässigkeit, erzeugt. Die weitere Ausgestaltung dieser Konstruktion wird uns in einem späteren Kapitel noch beschäftigen. Hier soll nur noch erwähnt werden, dass auch die vier Punkte, die sich auf den beiden blauen Geraden ergeben haben, harmonisch liegen. Nun geht es darum, die Punkte Q, Q', den Schnittpunkt der sie trennenden Geraden und U in eine harmonische Lage zu bringen. Man kann zwei Geraden, die sich in O schneiden, als zwei gegenüberliegende Seiten eines Vierseits auffassen. Nun lässt man die beiden anderen gegenüberliegenden Seiten des Vierseits sich in Q schneiden und findet den Punkt Q' als Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Vierseits (Abb. 2b blau). Die Punkte Q, Q' und U sowie der Schnittpunkt der zweiten Geraden durch O mit der Verbindungsgeraden Q, Q' haben nun harmonische Lage. Benutzt man nun Q und Q' in gleicher Weise als Projektionspunkte wie oben, so ergibt sich das Phänomen, das der projizierte Punkt nach der zweiten Projektion in sich selbst zurückfällt. Wir können das an den rot markierten Linien verfolgen: Man projiziert von Q ausgehend einen Punkt von der oberen auf die untere schwarze Gerade. Den entstandenen Punkt verbindet man mit Q' und verlängert die entstandene Gerade, bis sie wiederum die obere Gerade trifft. Diesen Punkt projiziert man wiederum von Q aus auf die untere Gerade und über Q' zurück auf die obere. Nun sind wir bei unserem Ausgangspunkt angelangt. Der Projektionsprozess, der sich zuvor ständig pendelnd fortsetzte, kommt nun an ein Ende, indem der Punkt auf seine anfängliche Position zurückfällt. Eine solche Projektion bezeichnet man als Involution. Wollte man weitere Punkte projizieren, so müsste man jedes Mal neu ansetzen. Dass der Vorgang sich nicht unaufhörlich fortsetzt, sondern in sich zurückführt, verdanken wir der harmonischen Lage der genannten Punkte.

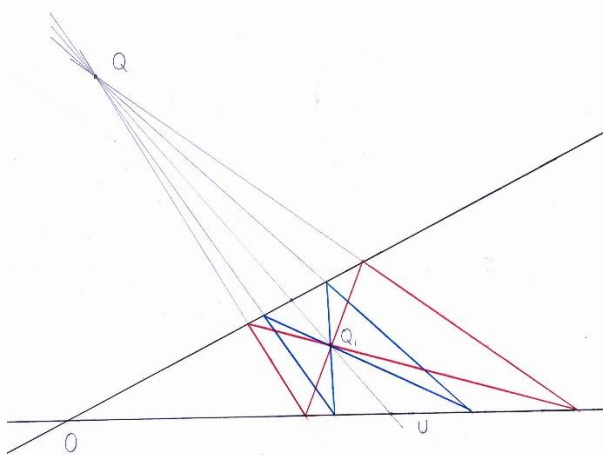


Abbildung 2b

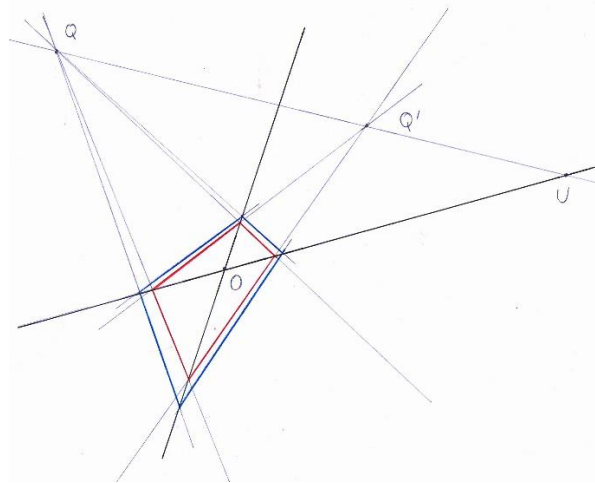


Abbildung 2c

Abbildung 2c zeigt eine andere Ausgestaltung desselben Prinzips. Wiederum werden die Punkte Q und Q' von den beiden schwarzen Geraden getrennt, zwischen denen hin und her projiziert wird.

Während sich vorher die Projektionslinien überkreuzten, ist dies hier nicht der Fall. Man projiziert, wie oben, abwechselnd von Q und Q' aus und es ergeben sich nacheinander die vier den Innenraum begrenzenden Seiten. Dass sich das Gebilde schliesst und somit der Ausgangspunkt nach zweimaligem hin und her Projizieren wieder erreicht wird, ist wiederum Folge der harmonischen Lage.¹ Rein geometrisch betrachtet sind die Konstruktionen einerseits einfach. Andererseits kann man darüber erstaunt sein, dass zwischen der harmonischen Lage und dem sich Schliessen von Gebilden ein solcher Zusammenhang besteht. Was hat die Gleichheit des Doppelverhältnisses mit dem zu sich selbst Zurückkehren eines projizierten Punktes zu tun? Führt man die Konstruktion so aus, dass einer der vier Punkte ein wenig verschoben wird, so ergibt sich ein anderes Bild (Abb. 2d): Die vier Geraden führen zu einer Ein- und Auswicklung, die sich in spiraliger Art nach innen und nach aussen prinzipiell unbegrenzt fortsetzen lässt, ohne dass man je wieder an denselben Punkt kommt. Faktisch beginnt man den Vorgang zwar irgendwo und hört nach einer gewissen Anzahl von Projektionsschritten auf, aber keiner der erreichten Punkte ist als Anfang oder Ende besonders ausgezeichnet. Anders bei der Involution: Hier setze ich zwar auch einen willkürlichen Anfang, die Konstruktion führt aber auf sich selbst zurück und ist damit nach zwei Schritten abgeschlossen und vollständig. Offensichtlich gibt es einen deutlichen qualitativen Unterschied zwischen Prozessen, von denen man nur jeweils einen Ausschnitt zur Darstellung bringen kann und solchen, die sich in sich selbst zum Abschluss bringen.

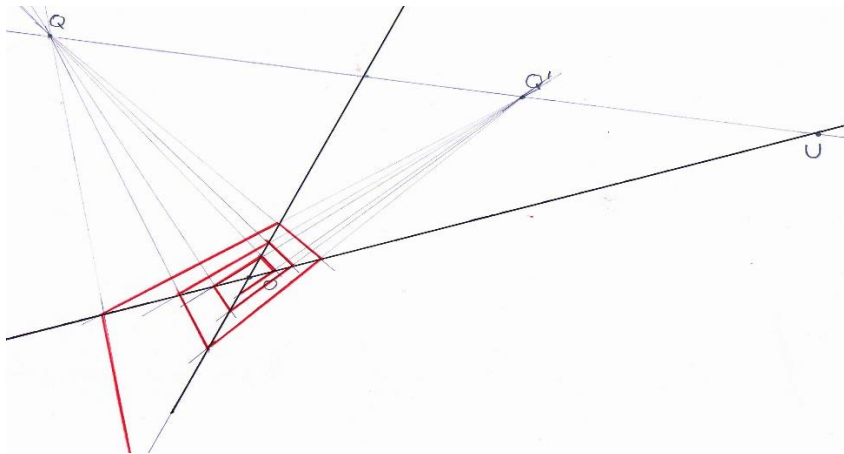


Abbildung 2d

Die Konstruktion von harmonischen Punkten durch ein Vierseit werden wir uns im Folgenden zunutze machen.² Es geht darum, sich die Bewegung zu verdeutlichen, die sich ergibt, wenn zu zwei fixen Punkten zwei weitere Punkte so bewegt werden, dass ihre gegenseitige Lage stets eine harmonische bleibt. Zu diesem Zwecke legen wir die vier Seiten des Vierseits so, dass die Eckpunkte auf einer Kreislinie zu liegen kommen (Abb. 3a). Eine der vier Seiten ist der Durchmesser des Kreises. Zwei gegenüberliegende Seiten des Vierseits treffen sich im Punkt P , zwei weitere im Punkt Q . Nun ziehen wir noch die beiden Diagonalen. Deren Schnittpunkt ergibt einen weiteren Punkt R . Durch den Punkt R ziehen wir von P und von Q aus je eine Gerade. Diese beiden Geraden stehen zu den Punkten Q und P in einem besonderen Verhältnis. Die Gerade QR (blau)

¹ Entsprechende Anregungen zur zeichnerischen Umsetzung findet man bei Whicher 1970 im Kap.: Projektive Verwandlungen -- Kollineationen

² Vgl. dazu: Bernard 1984, Kap.: Pol und Polare – harmonische Spiegelung von Kurven 2. Grades

ist die Polare zum Punkt P, die Gerade PR (rot) ist die Polare zum Punkt Q.³ Würde man durch die Punkte Q, bzw. P Tangenten an den Kreis legen, so würden diese den Kreis genau dort berühren, wo die jeweilige Polare ihn schneidet. Betrachten wir nun die rote Gerade: Die Punkte P und R sowie die beiden Schnittpunkte derselben mit der Kreislinie liegen harmonisch. Entsprechendes gilt für die blaue Gerade: Wiederum liegen die Punkte Q und R sowie die beiden Schnittpunkte derselben mit dem Kreis harmonisch. Was geschieht nun, wenn z. B. der Punkt R auf der blauen Geraden nach oben wandert und sich so der Kreislinie nähert?

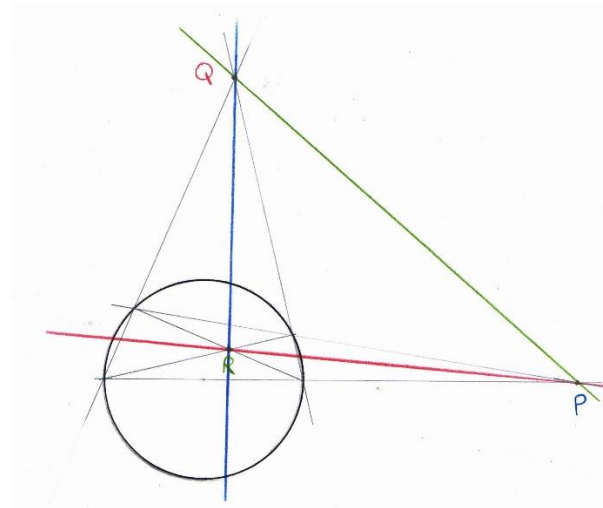


Abbildung 3a

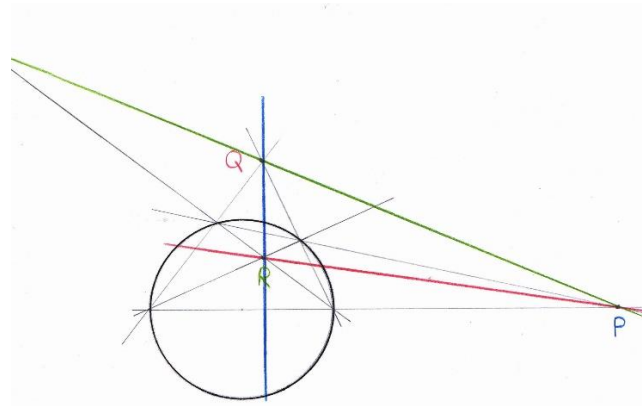


Abbildung 3b

Abbildung 3b zeigt eine entsprechende Konstruktion. Man sieht, dass der Punkt Q sich gegenläufig zum Punkt R bewegt und auf ihn zu wandert. Denkt man sich diese Bewegung fortgesetzt, so würden sich die beiden Punkte im selben Moment auf der Kreislinie treffen. Umgekehrt: Wandert der Punkt R nach unten, bis er auf dem Durchmesser zu liegen kommt, so läuft der Punkt Q in die Unendlichkeit. In diesem Moment fällt das Vierseit in den Durchmesser zusammen. Die Konstruktion wird also deutlich sprechender, wenn man sie in Bewegung denkt. Setzt man die Bewegung des Punktes R weiter fort in die untere Hälfte des Kreises hinein, so erscheint der Punkt Q, der soeben nach oben in die Unendlichkeit entwichen war, nun von unten wieder und nähert sich dem Punkt R an. Entsprechend könnte man den Punkt R in Richtung des Punkts P bewegen. Die grundsätzlichen Verhältnisse sind dieselben: Die beiden Kreispunkte sind jeweils fix und die beiden innerhalb und ausserhalb des Kreises sich bewegendenden Punkte laufen jeweils gegenläufig aufeinander zu oder voneinander weg. Die Verhältnisse auf der grünen, ausserhalb des Kreises verlaufenden Geraden haben wir bis jetzt noch nicht betrachtet. Auch hier ergibt sich ein harmonischer Punktwurf, wenn man die beiden Diagonalen des Vierseits verlängert, bis sie die grüne Gerade schneiden. Diese Schnittpunkte und die Punkte Q und P liegen dann harmonisch zueinander. Allerdings findet man hier keine offensichtlichen Fixpunkte, da die grüne Gerade den

³ Das Verhältnis von Pol und Polare am Kreis, bzw. auch an jedem anderen Kegelschnitt ist dadurch gekennzeichnet, dass die Polare dem Pol in eindeutiger Weise zugeordnet ist, dergestalt, dass eine Gerade, die man vom Pol durch zwei Punkte des Kegelschnittes zieht, die Polare in einem Punkt schneidet, der mit den drei anderen Punkten harmonisch liegt. So kann man jedem Punkt, egal ob er innerhalb oder ausserhalb des Kegelschnittes liegt, in Bezug auf diesem Kegelschnitt eine Gerade eindeutig zuordnen und umgekehrt.

Kreis nicht schneidet. Die Gesetzmässigkeit der Bewegung auf dieser Geraden wird uns im weiteren Verlauf des Kapitels noch beschäftigen.

Die Polare zu einem ausserhalb des Kreises liegenden Pol kann man ermitteln, indem man von diesem Punkt die beiden Tangenten an den Kreis legt. Verbindet man die beiden Punkte, in denen die Tangente die Kreislinie berührt, miteinander, so erhält man die zugehörige Polare. Zieht man nun durch den Pol weitere Geraden, die den Kreis schneiden, so ergibt sich folgendes: Man kann jede so den Kreis schneidende Gerade als Polare auffassen. Sucht man zu dieser wiederum den Pol, so stellt sich heraus, dass die Pole alle auf der ursprünglichen Polaren liegen (s. Abb. 4a). Man findet diese, indem man von den Schnittpunkten der durch den ursprünglichen Pol laufenden Geraden mit dem Kreis die Tangenten zieht. Die Schnittpunkte der beiden Tangenten liegen jeweils auf der ursprünglichen Polaren. Eine entsprechende Konstruktion lässt sich grundsätzlich mit allen Kegelschnitten machen. In Abbildung 4b ist sie für die Ellipse dargestellt.

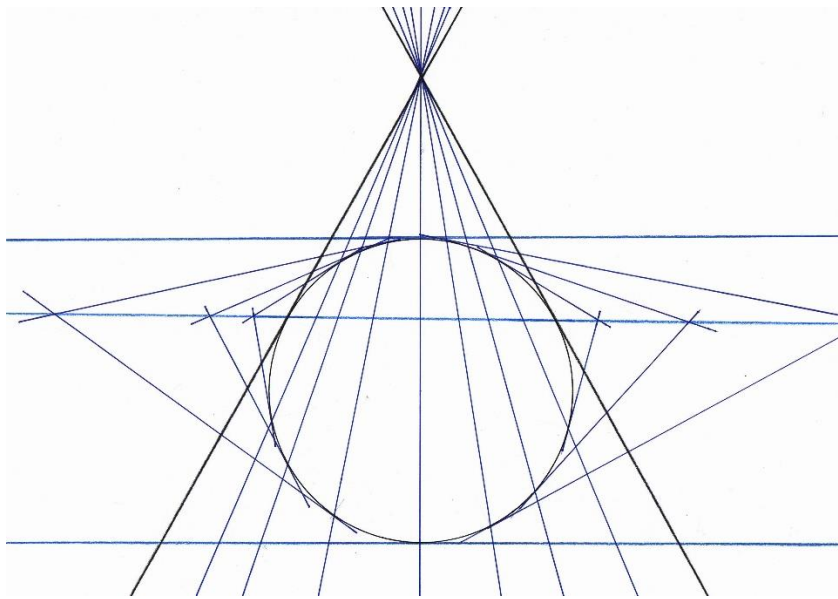


Abbildung 4a

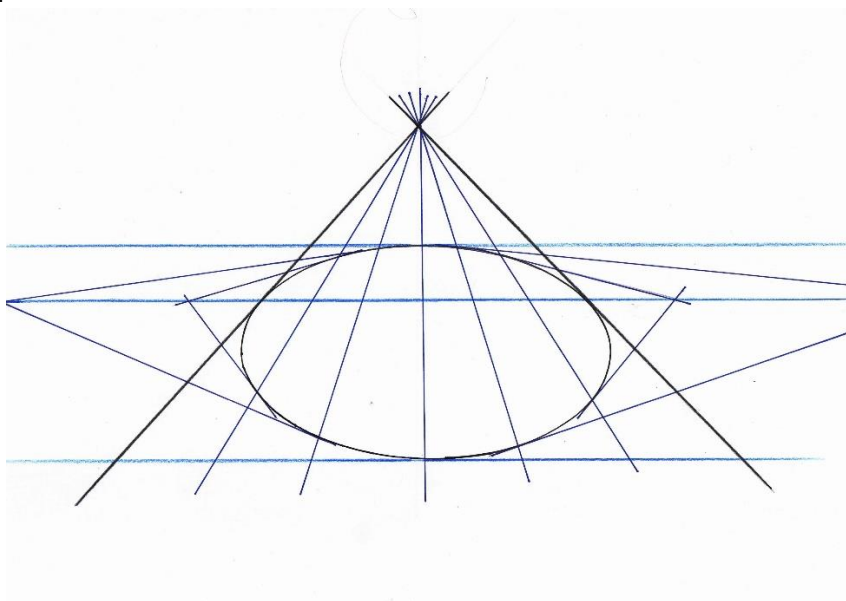


Abbildung 4b

Es zeigen sich hier harmonische Qualitäten in vielfacher Weise: Auf jeder den Kreis schneidenden Geraden durch den ursprünglichen Pol findet sich ein harmonischer Punktwurf. Auf der ursprünglichen Polaren finden sich solche in grosser Zahl: Jeder Pol (Tangentenschnittpunkt) liegt harmonisch zu dem Schnittpunkt seiner Polaren mit der durch ihn gezogenen Geraden in Bezug auf die beiden Schnittpunkte derselben Geraden mit dem Kreis. Wir haben also einerseits einen ausserhalb des Kreises liegenden Punkt, durch den alle Geraden laufen, auf denen ein harmonischer Punktwurf erzeugt wird, und andererseits eine den Kreis schneidende Gerade, auf der alle Punkte liegen, deren Polaren durch den ursprünglichen Pol laufen. Man sieht hier nochmals, dass sich für jeden ausserhalb des Kreises liegenden Pol eine den Kreis schneidende Polare ergibt, dass sich Pol und Polare aufeinander zu bzw. von einander wegbewegen und dass sie, denkt man sich ihre Bewegung fortgesetzt, auf der Kreislinie zusammenfallen. Es ist natürlich ebenso gut möglich, dass der Pol innerhalb des Kreises oder des Kegelschnittes liegt, die Polare liegt dann ausserhalb. Die Bewegungsgeste, die sich in diesem Fall ergibt, wird uns im Folgenden noch beschäftigen. Grundsätzlich ist klar, dass man mit Hilfe der harmonischen Lage von vier Punkten zu jedem Punkt innerhalb eines Kreises eine ausserhalb liegende Gerade finden kann, die ihm eindeutig zugeordnet ist und zu jedem ausserhalb des Kreises liegenden Punkt eine denselben schneidende Gerade. Die Verhältnisse sind jeweils eindeutig und wechselseitig. Damit ist prinzipiell die Möglichkeit geschaffen, zu einer Form in Bezug auf einen Kreis, oder einen anderen Kegelschnitt, die polare Gegenform zu finden.⁴ Der Einfachheit halber werden wir uns bei den nachfolgenden Konstruktionen auf den Kreis beschränken.

Inversionen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, wie man die Gegenform zu einer Form finden kann. Bei der Inversion⁵ ordnet man Punkte einander zu, in der Art, dass einem beliebigen Punkt innerhalb des Kreises derjenige entspricht, der auf der Verbindungsgeraden des Punktes mit dem Kreismittelpunkt harmonisch zu diesem liegt in Bezug auf die beiden Schnittpunkte der Geraden mit der Kreislinie (s. Abb. 5a, Punkt D liegt harmonisch zu B in Bezug auf A und C). Will man in dieser Weise Formen dualisieren, so legt man auf eine beliebige Form innerhalb des Kreises eine Reihe von Punkten und sucht zu diesen jeweils den harmonischen vierten Punkt. Die so gefundenen Punkte lassen sich wiederum zu einer Form verbinden.⁶ Diese Formen haben teilweise gegensätzliche Eigenschaften. Wir werden im Folgenden einige Beispiele betrachten. Die andere Möglichkeit, die dem Punkt nicht wiederum einen Punkt sondern eine Gerade zuordnet, führt zu Formverwandlungen, die radikaler sind. Sie werden auch als polarreziproke Verwandlungen bezeichnet. Wählt man den Punkt innerhalb des Kreises, so ist ihm diejenige Gerade ausserhalb des Kreises zugeordnet, die senkrecht durch den in der Inversion gefundenen harmonischen Punkt

⁴ Anregungen dazu findet man z. B. bei Schubert 2000; Whicher 1970, Kap.: Polarreziproke Verwandlungen – Korrelationen; Bernard 1984, Kap. 25 und 26; Baravalle 1963, Kap.: Projektive Geometrie und folgende.

⁵ Ausführlich bearbeitet findet man die Inversion z. B. bei Kemper 1984. Er zeigt dort unter anderem Inversionsbilder der von Rudolf Steiner entwickelten Planetensiegel.

⁶ Anmerkung zur Konstruktion: Zu einem innerhalb des Kreises liegenden Punkt findet man den entsprechenden ausserhalb des Kreises in folgender Weise: Man verbindet den Punkt mit dem Kreismittelpunkt und verlängert die so entstehende Gerade zum Durchmesser. Dann legt man durch den ursprünglichen Punkt eine Gerade senkrecht zum Durchmesser. Diese schneidet den Kreis in zwei Punkten. Durch diese Punkte legt man je eine Tangente an den Kreis. Der Schnittpunkt der beiden Tangenten ist der gesuchte Punkt. Die zum ursprünglichen Punkt polare Gerade läuft ebenfalls durch diesen gefundenen Punkt. Sie steht senkrecht auf dem verlängerten Kreisdurchmesser, der durch diesen hindurchläuft.

geht (s. Abb. 5b). Will man dann eine Form dualisieren, so erhält man die Gegenform dadurch, dass sich eine Reihe von Tangenten an diese anschmiegt, denn jede einem Punkt der ursprünglichen Form in dieser Weise zugeordnete Gerade ist eine Tangente an die Gegenform. Diese entsteht also nicht durch die Verbindung von Punkten, sondern indem sie von Geraden eingehüllt wird. Im nächsten Abschnitt werden wir Beispiele einer solchen Dualisierung betrachten, hier wollen wir uns zunächst der Inversion zuwenden.

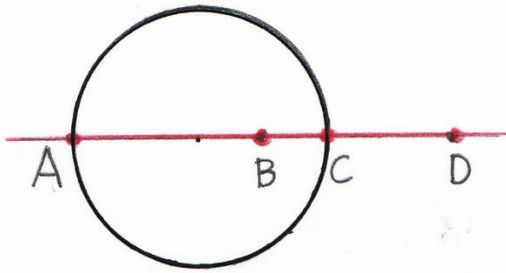


Abbildung 5a

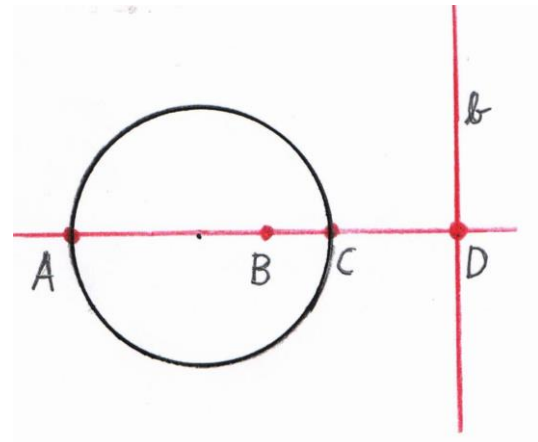


Abbildung 5b

Ein Merkmal derselben ist, dass Kreise wiederum zu Kreisen werden. Berührt eine Form die Linie des polarisierenden Kreises, so tut es die Gegenform an derselben Stelle auch. Läuft eine Form durch den Mittelpunkt, so geht die Gegenform durch die Unendlichkeit. In Abbildung 5c befinden sich fünf Kreise (rot) innerhalb des polarisierenden Kreises (schwarz). Somit berühren alle Kreise diesen in einem Punkt. Folglich tun dies auch die Gegenkreise (blau). Der erste rote Kreis ist ziemlich klein, die weiteren werden dann grösser, bis der dritte derselben durch den Kreismittelpunkt hindurchgeht. Die beiden letzten Kreise schliessen sich unterhalb des Kreismittelpunktes. Während diese Kreise einfach wachsen, ist die Gebärde bei den Gegenkreisen eine andere. Zum ersten roten Kreis gehört der nur unwesentlich grössere blaue Kreis, der sich nach oben schliesst. Der nächste Kreis, der zum zweiten roten gehört, hat bereits ziemliche Ausmasse, so dass er nicht ganz auf dem Blatt Platz findet, er schliesst sich ebenfalls nach oben. Zum dritten Kreis gehört die waagrechte Gerade, ein Kreis, der sich in der Unendlichkeit schliesst. Der vierte und fünfte Kreis hingegen haben gegenüber den ersten die Richtung ihrer Rundung geändert, sie umgreifen den polarisierenden Kreis und nehmen ihn in ihr Inneres auf, während die ersten Kreise diesen in ihrem Aussenbereich lassen. Die Gerade, der mittlere Kreis, nimmt eine Sonderstellung ein. Was hier innen und was aussen ist, lässt sich nur entscheiden, wenn man die Bewegungsrichtung verfolgt, aus welcher der Kreis in die Gerade einmündet. Hat man nur diese Gerade und fasst sie nicht als Stadium eines Bewegungsverlaufes auf, so kann man keine Entscheidung über Innen und Aussen treffen. Überhaupt stellt uns hier die Unendlichkeit vor ein Rätsel, wenn man den Bewegungsverlauf genauer betrachtet. Offensichtlich liegen der untere Punkt des kleinsten roten Kreises und der oberste Punkt des kleinsten blauen Kreises harmonisch zueinander, in Bezug auf den obersten und untersten Punkt des polarisierenden Kreises. Für den nachfolgenden grösseren roten und den ihm entsprechenden blauen Kreis gilt dasselbe. Würde man die Kreise langsam wachsen lassen, so würde man sehen, dass die Gegenkreise dies ebenfalls tun, aber wesentlich schneller grösser werden. Nähert sich der rote Kreis dem Mittelpunkt, so nimmt der Durchmesser des Gegenkreises gewaltige Ausmasse an, wobei er an Krümmung verliert. Erreicht

der rote Kreis den Mittelpunkt, so wird der Gegenkreis zur Geraden. Nur besteht hier die Merkwürdigkeit, dass die Gerade zwar durch die Unendlichkeit geht, sich aber nicht in dem unendlich fernen Punkt schliesst, der auf dem senkrechten Durchmesser des polarisierenden Kreises harmonisch zu den anderen Punkten liegt. Vielmehr liegt sie zu diesem Durchmesser exakt senkrecht und bildet so mit ihm ein Kreuz. Sie geht also durch einen unendlich fernen Punkt, der zu dem harmonisch liegenden zwar in einem Verwandtschaftsverhältnis steht, aber doch ein anderer ist. Dass sie dennoch dazu gehört, kann man eigentlich nur aus der fortschreitenden Bewegung der Gegenkreise entnehmen, die, indem sie sich einmal nach oben und dann nach unten schliessen, in jedem Fall das Stadium dieser Geraden durchlaufen müssen.

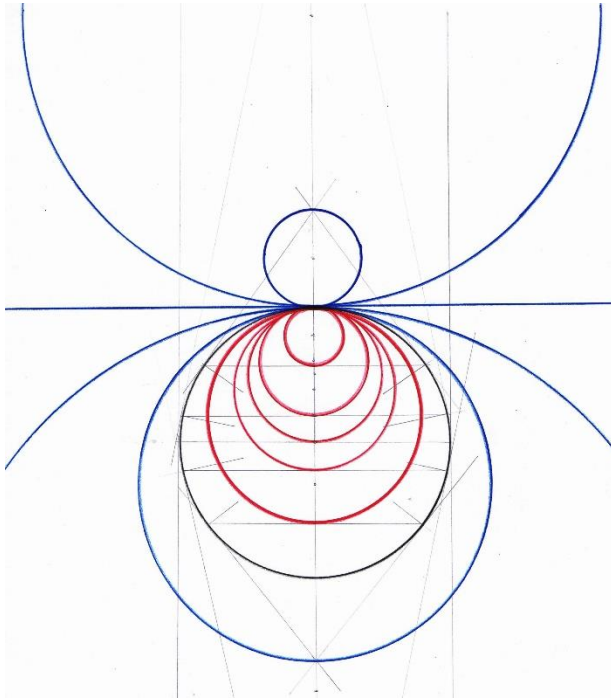


Abbildung 5c

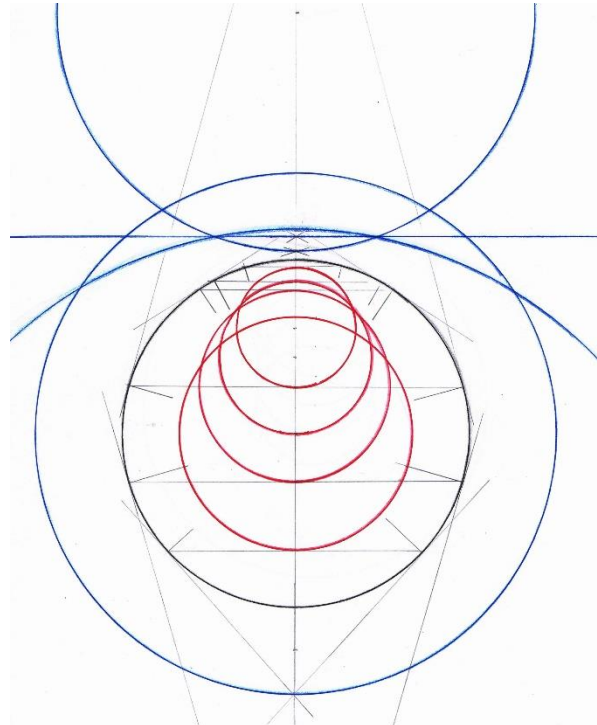


Abbildung 5d

In Abbildung 5d sind vier Kreise teilweise ineinandergeschoben. Man kann die Abbildung am einfachsten erfassen, wenn man von dem grössten der roten Kreise ausgeht, welcher konzentrisch zum polarisierenden Kreis liegt. Der dazugehörige Gegenkreis liegt dann ebenfalls konzentrisch. Die roten Kreise werden kleiner und wandern gleichzeitig nach oben. Dem nächstkleineren roten Kreis entspricht ein blauer Kreis, der sich nach unten schliesst, aber bereits so gross ist, dass nur ein kleiner Teil desselben auf dem Blatt Platz hat. Der folgende Kreis geht wiederum durch den Mittelpunkt, sodass ihm eine Gerade entspricht. Dem kleinsten entspricht ein sich nach oben schliessender Kreis. Die Bewegungsgebärde der Gegenkreise ist ähnlich, wie in Abbildung 5c. Dadurch, dass die roten Kreise ineinandergeschoben sind, schneiden sie sich. Dies tun die Gegenkreise ebenfalls. Verfolgt man deren Bewegung, so sieht man, dass sie den nach oben wandernden roten Kreisen entgegenkommen – auf dem gemeinsamen Durchmesser aller Kreise ist der konzentrische Kreis weiter vom polarisierenden Kreis entfernt als die anderen – dabei aber an Krümmung verlieren bis zur Geradlinigkeit, um sich dann zur anderen Seite hin zu krümmen. Betrachten wir die folgende Serie von Abbildungen (6a – 6f).

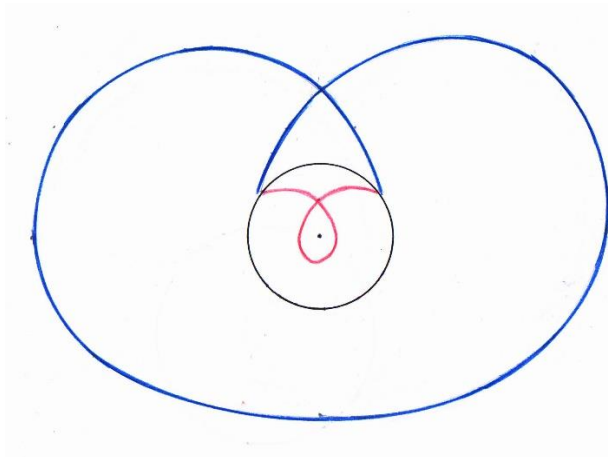


Abbildung 6a

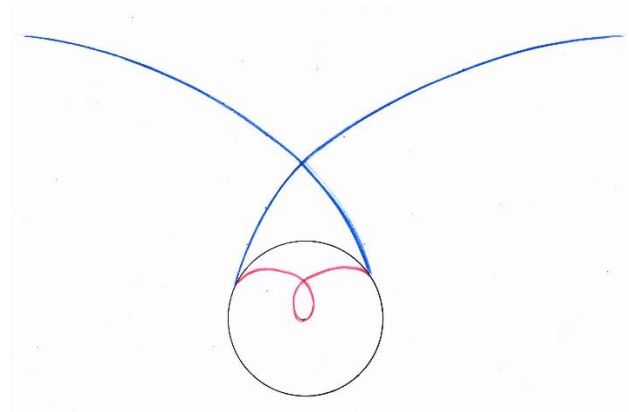


Abbildung 6b

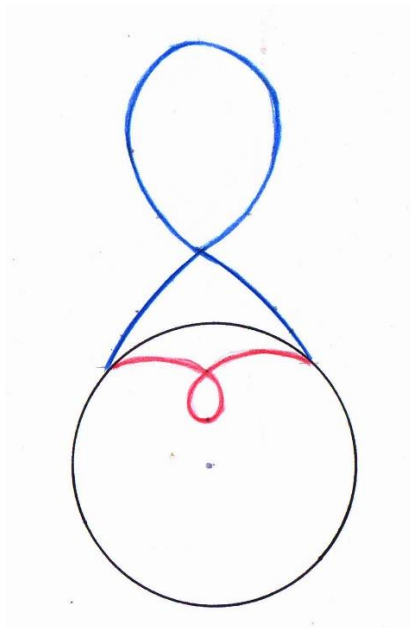


Abbildung 6c

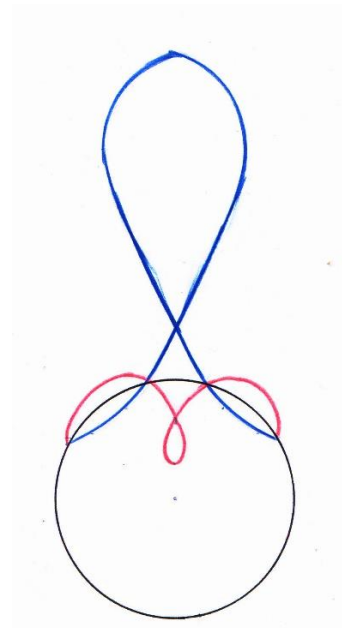


Abbildung 6d

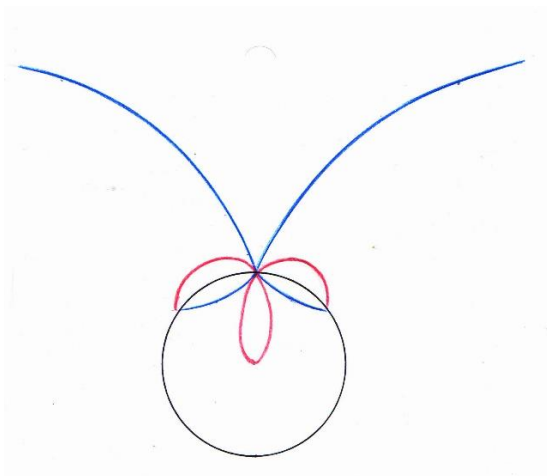


Abbildung 6e

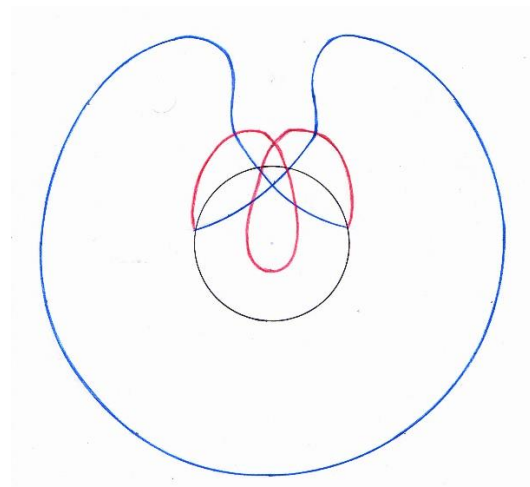


Abbildung 6f

Es handelt sich jeweils um eine einfache Schleife, die im polarisierenden Kreis liegt. In Abbildung 6a hat die Schleife ihren tiefsten Punkt unterhalb des Kreismittelpunktes. Entsprechend schliesst sich die Gegenform unterhalb des Kreises. Dem Doppelpunkt, wo man sich selbst begegnet, wenn man der Schleife entlangläuft, entspricht ein solcher oberhalb des Kreises in der Gegenform. In Abbildung 6b läuft die Schleife durch den Kreismittelpunkt. Entsprechend zieht sich die Gegenform durch die Unendlichkeit. Die beiden nach rechts und links ausgreifenden Bögen der Form schmiegen sich an eine Gerade an, die sie im Unendlichen berühren. In Abbildung 6c verläuft die Schleife oberhalb des Mittelpunktes, entsprechend schliesst sich die Gegenform oberhalb des Kreises. In den nächsten Abbildungen wandert die Schleife langsam wieder nach unten, der zu ihr hinführende Bogen verläuft teilweise ausserhalb des polarisierenden Kreises, wodurch sich interessante Überkreuzungen zwischen den beiden Formen ergeben. Dem ausserhalb des Kreises verlaufenden Teil der roten Form entspricht der innerhalb desselben verlaufende Teil der blauen. In Abbildung 6d schliesst sich wiederum die Gegenform oberhalb des Kreises, da die Schleife oberhalb des Mittelpunktes verläuft. In Abbildung 6e zieht sich die Gegenform durch die Unendlichkeit, während sie sich in Abbildung 6f unterhalb des Kreises schliesst. Form und Gegenform begegnen und überkreuzen sich jeweils auf der Kreislinie.

In Abbildung 7a ist die Schleife zur geschlossenen Form ergänzt, die gänzlich innerhalb des Kreises verläuft und deren unterer Teil selbst kreisförmig ist. Entsprechend ist die Gegenform: ihr unterer Teil ist ebenfalls kreisförmig, gegen oben hin schmiegt sich die Form nach rechts und nach an eine Gerade an, wobei sie sich einmal überkreuzt. In Abbildung 7b tauschen Form und Gegenform teilweise ihre Rollen. Die ursprüngliche Form verläuft zunächst innerhalb des polarisierenden Kreises, sprengt dann dessen Grenzen und zieht sich ausserhalb desselben durch die Unendlichkeit. Entsprechend verläuft die Gegenform zunächst ausserhalb des Kreises, stülpt sich dann aber in ihn hinein und bildet eine durch den Mittelpunkt laufende Schleife.

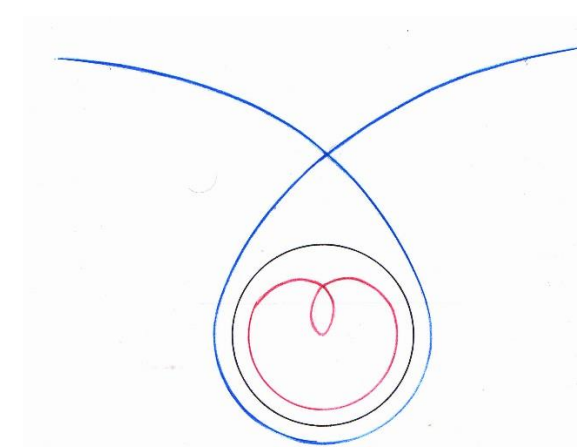


Abbildung 7a

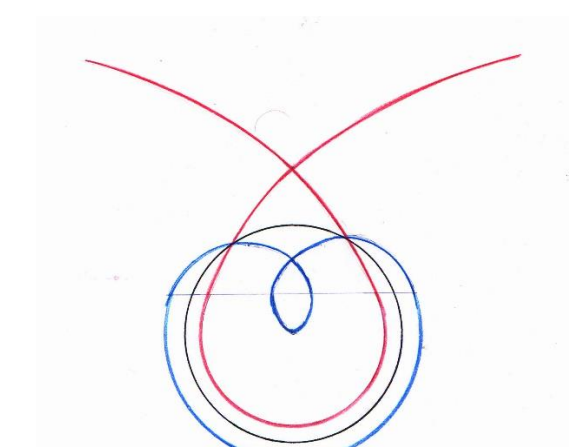


Abbildung 7b

Pol und Polare. Die ursprüngliche Dualisierung.

In der Ebene sind Punkt und Gerade polar zueinander, so wie Punkt und Ebene im Raum. Daraus ergibt sich, dass die Zuordnung einer Geraden ausserhalb des polarisierenden Kreises zu einem Punkt innerhalb desselben und umgekehrt eine vollständigere, gleichsam durchgreifendere Dualisierung erzeugt als die Zuordnung eines Punktes zu einem Punkt. Dies wollen wir an einigen

Beispielen betrachten. In Abbildung 8a liegen einige Punkte auf einer die Kreislinie berührenden Geraden. Die Gegenform ist so gestaltet, dass die entsprechenden Geraden durch einen Punkt laufen. Es entspricht sich also eine Form, in der gar keine Krümmung auftritt (die Gerade) und eine solche, die eigentlich nur aus Krümmung besteht (der Punkt). Von einer Einhüllung der Gegenform durch Tangenten kann hier keine Rede sein, denn die Gegenform ist auf einen Punkt zusammenge schrumpft, von dem zwar Geraden ausstrahlen, die aber keine irgendwie sichtbare Kurve bilden. Legt man statt einer Geraden eine leicht gebogene Linie in den Kreis (Abb. 8b), so ergibt sich bei der Gegenform ebenfalls eine Krümmung. Diese ist gleich dem ursprünglichen Bogen konvex, aber stärker gekrümmt. Legt man einen stärker gekrümmten Bogen in den Kreis, so ist die entsprechende Gegenform im Verhältnis dazu schwächer gekrümmt (Abb. 8c). Legt man statt eines einfachen Bogens einen solchen in den Kreis, der sich zur Ellipse schliesst, so sieht man nochmals deutlicher, wie die starke Krümmung der schwachen entspricht und umgekehrt. An den Stellen, an denen die ursprüngliche Ellipse schwach gekrümmt ist, weist die sich ergebende Gegenform, die ebenfalls elliptisch ist, ihre stärkste Krümmung auf. Dort wo sie eine schwache Krümmung aufweist, ist die Gegenform dagegen stark gekrümmt. (Abb. 8d). Dies ist ein allgemeines Prinzip, das sich bei dieser Art der Dualisierung ergibt. Durchschneidet die ursprüngliche Form den Kreis, so wie in Abbildung 8e, so tut dies die Gegenform auch. Wie bei der Inversion treffen sich Form und Gegenform in den gleichen Punkten der Kreislinie.

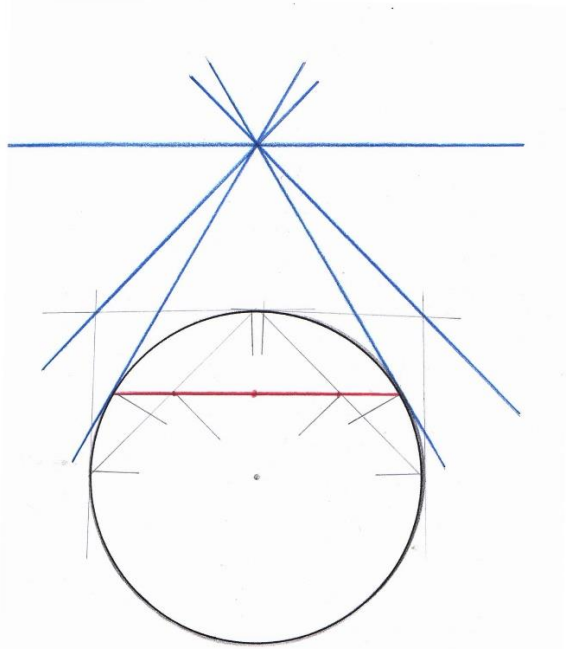


Abbildung 8a

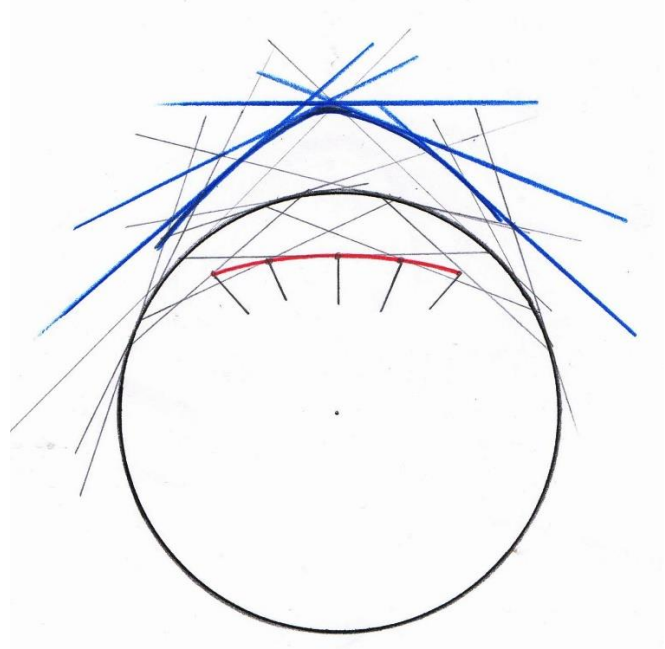


Abbildung 8b

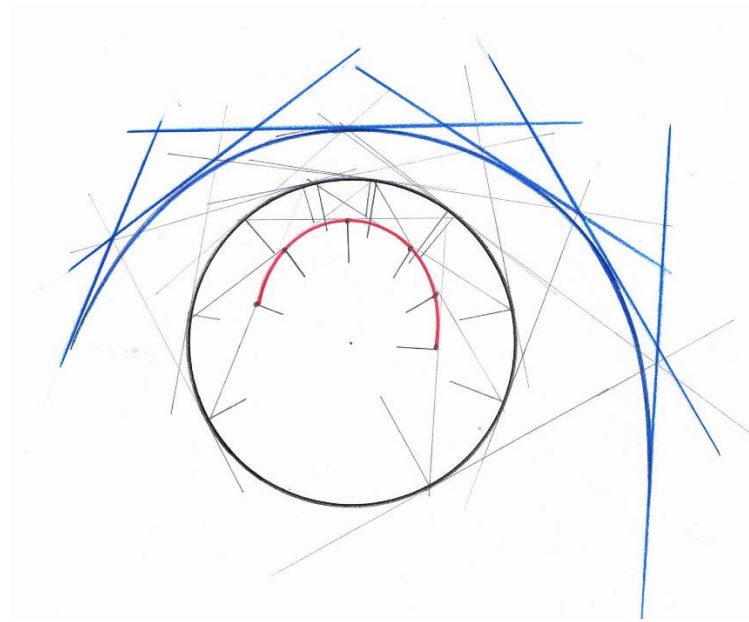


Abbildung 8c

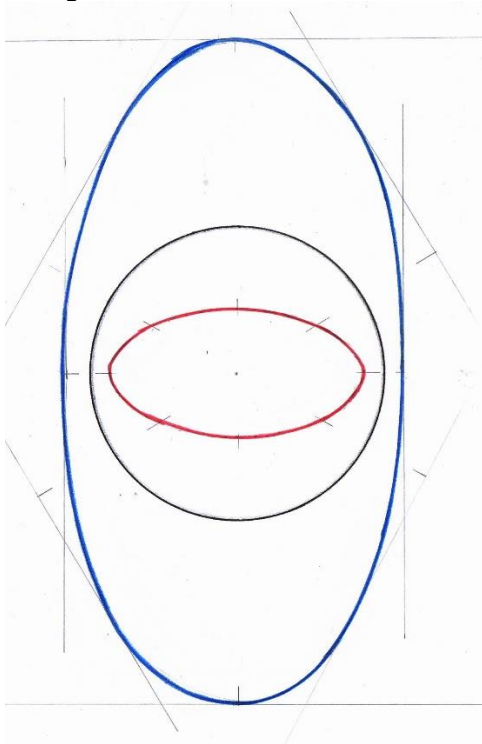


Abbildung 8d

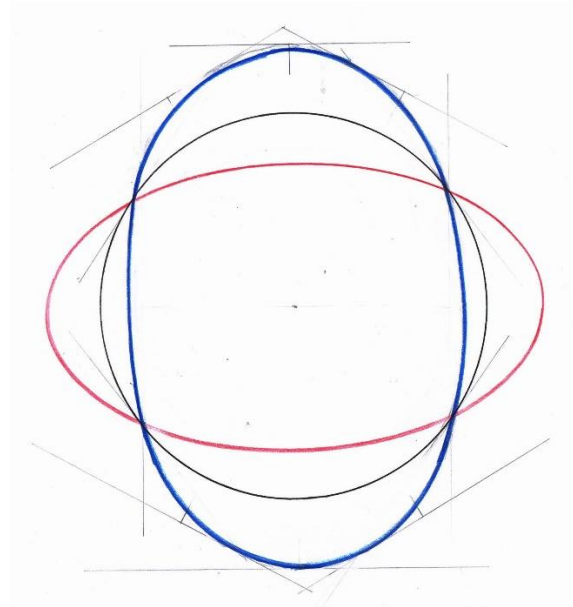


Abbildung 8e

Erstaunliches ergibt sich, wenn man in den Kreis eine Wellenlinie hineinlegt oder eine Kurve, die in eine Spitze ausläuft. Betrachten wir zunächst die Wellenlinie (Abb. 8f). Würde man mit einer Geraden auf dieser Linie entlanggleiten, in der Art, dass die Gerade zu jedem Punkt des Kreises einmal Tangente wird, so ändert die Tangente beim Durchlaufen des Bogens einmal ihre Drehrichtung. Vor diesem Wendepunkt verläuft der Bogen konvex, danach konkav. Die Gegenform weist ebenfalls einen konvexen und einen konkaven Bogen auf, nur sind diese nicht durch eine Wendestelle, sondern durch eine Spitze verbunden. Wiederum entspricht der konkaven Krümmung der Form eine solche der Gegenform und der konvexen ebenfalls. Die Spitze, in die die

Kurve hineinläuft, liegt auf der Geraden, die dem Wendepunkt der ursprünglichen Kurve harmonisch zugeordnet ist. Die Entsprechung von Form und Gegenform ist hier wechselseitig. Legt man die Form, bei der zwei Biegungen durch eine Spitze verbunden sind, in den Kreis, so ergibt sich als Gegenform ausserhalb des Kreises eine Wellenlinie mit Wendestelle (Abb. 8g). Man kann einen Bogen, der in eine Spitze einmündet, auch anders führen, nämlich so, dass beide Teile der Form, der zur Spitze hinführende und der von ihm wegführende, in die gleiche Richtung gebogen sind. Sind, wie in Abbildung 8i beide Bogenteile konvex, so trifft dasselbe für die Gegenform zu, die mit der ursprünglichen Form von gleicher Art ist. Mit diesen Beispielen hätten wir einige Grundformen, die sich bei der Polarisierung am Kreis ergeben, aufgezeigt. Nach Belieben kann man nun zu weiteren, komplizierteren Formen die Gegenformen finden. Ein Beispiel sei noch betrachtet, bei dem eine im Inneren des Kreises verlaufende Form einerseits ihre Orientierung an der Kreislinie sucht, sich andererseits aber auch von dieser löst, indem sie eine Schlaufe bildet (Abb.8i). Verfolgt man die Kurve von links unten nach rechts oben, so hat man zunächst einen konvexen Kurventeil, der in einen konkaven übergeht, um dann wieder in einen konvexen einzumünden. Die Gegenform kann man in gleicher Weise durchlaufen, allerdings durchquert man dabei zweimal die Unendlichkeit. Der erste Teil der Form ist ebenfalls konvex, er liegt unten in der Nähe der roten Form, schmiegt sich ebenfalls, allerdings von aussen, ein stückweit an den Kreis und läuft dann gegen eine Gerade zu, mit der sie im Unendlichen zusammenfällt. Die Form läuft nach rechts aus dem Bild heraus und kommt von links wiederum ins Bild hinein, indem sie sich an dieselbe Gerade, aber jetzt von der anderen Seite, anschmiegt. Der folgende Kurventeil verläuft konkav, zieht sich nochmals durch die Unendlichkeit, um dann von unten links herkommend, wiederum in einen konvexen Kurventeil über zu gehen, der sich, nach rechts verlaufend, dem polarisierenden Kreis wieder nähert.

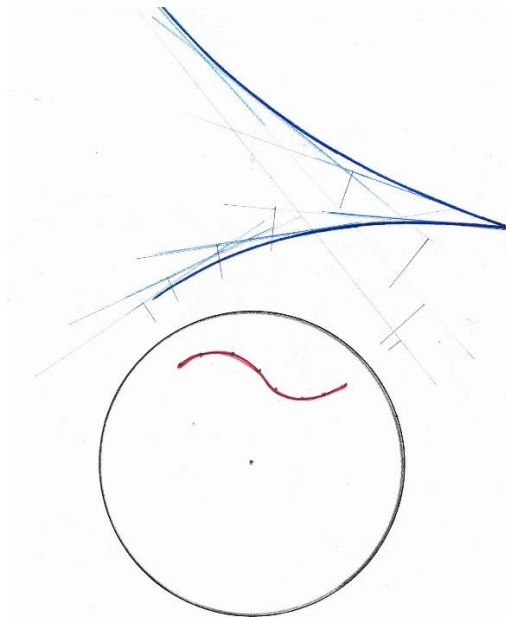


Abbildung 8f

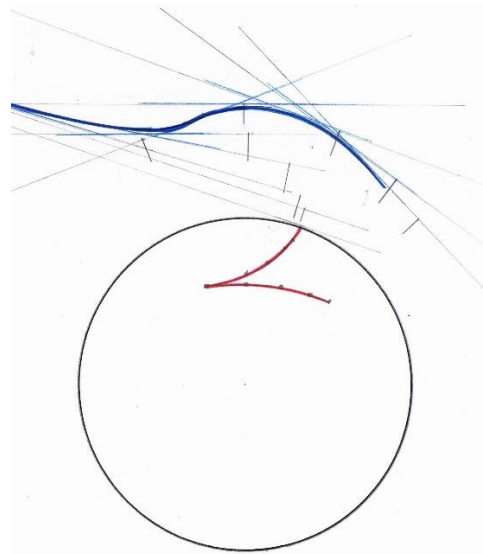


Abbildung 8g

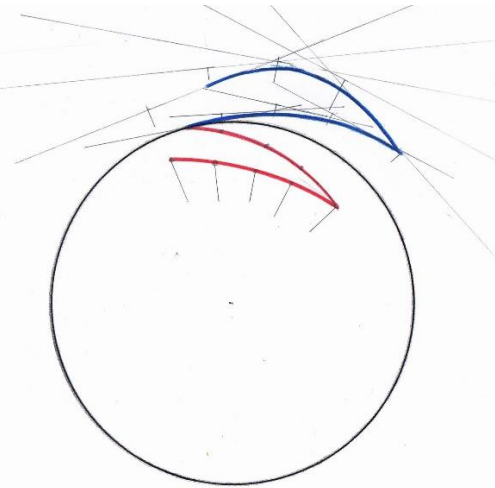


Abbildung 8h

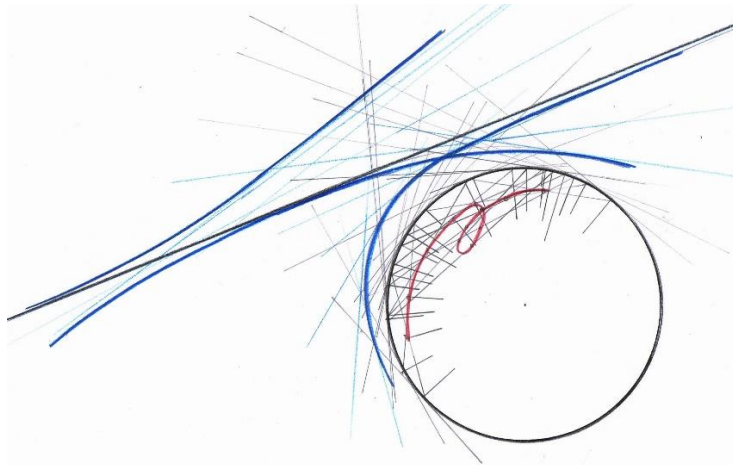


Abbildung 8i

Louis Locher Ernst hat eine freie Geometrie ebener Kurven verfasst.⁷ Hier analysiert er Kurven in der Ebene, unabhängig davon, ob sich die Kurve durch eine algebraische Formel beschreiben lässt oder nicht. Er beginnt seine Betrachtung mit einfachen, gebogenen Formen, die keinerlei Besonderheiten, wie z. B. gerade Strecken, Ecken oder Richtungswechsel innerhalb der Biegung aufweisen. Einen solchen einfachen Bogen legt er in den geschlossen Innenbereich eines Dreiecks und verfolgt ihn vom Anfangspunkt A bis zum Endpunkt E (Abb. 9a). Zum besseren Verständnis sind hier die durch drei Seiten in der Ebene entstehenden Bereiche mit 1, 2, 3 und 4 nummeriert. Lässt man einen Punkt auf diesem Bogen entlanglaufen, so kann er vom Anfang bis zum Ende gelangen, ohne seine Richtung zu ändern. Entsprechendes gilt für eine Tangente, die man den Bogen entlang bewegt. Man gelangt vom Anfang bis zum Ende, ohne die Drehrichtung ändern zu müssen. Welche Möglichkeiten gibt es nun, um die Kurve fortzusetzen, wobei fürs erste, Strecken und Ecken ausgeschlossen sein sollen und nur gebogene Formen betrachtet werden. Richtungswechsel innerhalb der Biegung werden jetzt als Möglichkeit zugelassen. Setzt die Kurve ihren Verlauf so fort, dass der Bogen keinerlei Besonderheit aufweist, so gelangt man in den Bereich 2 hinein. Weder der Punkt noch die Tangente müssen hier ihre Richtung ändern. Gibt man der Kurve im Punkt E eine Wendestelle, so gelangt man in den Bereich 3 hinein (Abb. 9b). Verfolgt man einen auf dieser Kurve laufenden Punkt, so ändert dieser seine Richtung nicht. Die Tangente allerdings ändert ihre Drehrichtung im Punkt E. Eine weitere Möglichkeit ist es, in den Punkt E eine Spitze zu legen, wodurch man in den Bereich 4 gelangt. Eine solche Spitze nennt man Dornspitze. Hier sind die Verhältnisse umgekehrt, die Tangente kann die Kurve durchlaufen, ohne ihre Drehrichtung zu ändern, der Punkt, der der Kurve entlangläuft, ändert seine Richtung, wenn er in der Spitze angekommen ist (Abb. 9c). Die vierte Möglichkeit schliesslich besteht darin, die Kurve im Bereich 1 zurücklaufen zu lassen. Die sich so ergebende Spitze ist anderer Art. Man nennt sie Schnabelspitze. Hier ändert sowohl der die Kurve durchlaufende Punkt seine Richtung als auch die Tangente. Locher Ernst führt aus, dass der einfache Bogen zu sich selbst polar ist und ebenso auch die Schnabelspitze. Das bedeutet, dass die Gegenkurve eines einfachen Bogens wieder ein einfacher Bogen ist, dasselbe gilt für die Schnabelspitze. Polarisiert man hingegen eine Wendestelle, so erhält man eine Dornspitze und umgekehrt. Das liegt daran, dass bei der Wendestelle der Punkt seine Richtung nicht ändert, die Tangente hingegen schon, während es bei

⁷ Vgl. Locher-Ernst, 2016a

der Dornspitze genau umgekehrt ist. Daher sind diese beiden Formen polar zueinander. Eine freie Polarisierung, das heisst eine solche, die ohne ein polarisierendes Element, wie z. B. den Kreis, auskommt, führt also grundsätzlich zu denselben Resultaten, wie die oben gezeigte Polarisierung am Kreis. Die freie Form der Polarisierung arbeitet ganz mit den qualitativen Elementen einer Form, durch die Polarisierung am Kreis kann man die Grösse und Lage der Gegenform exakter bestimmen. Ihre Beschaffenheit bleibt aber im Prinzip dieselbe.

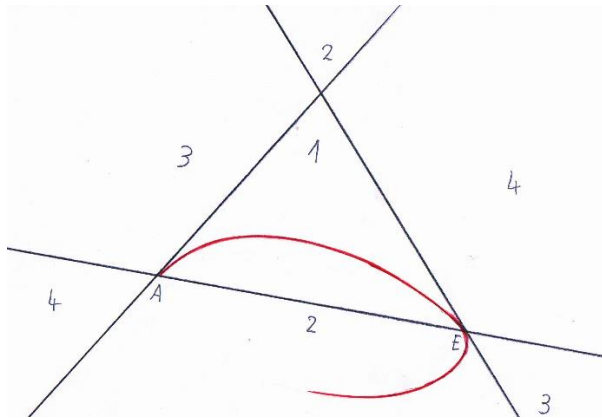


Abbildung 9a

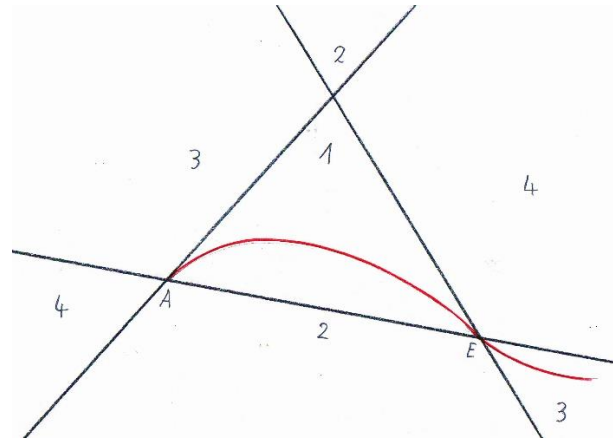


Abbildung 9b

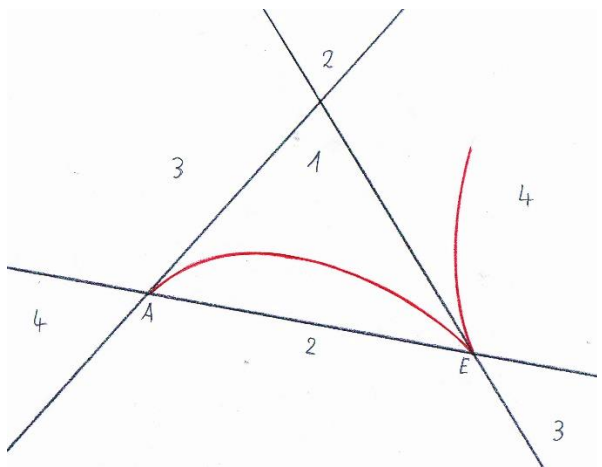


Abbildung 9c

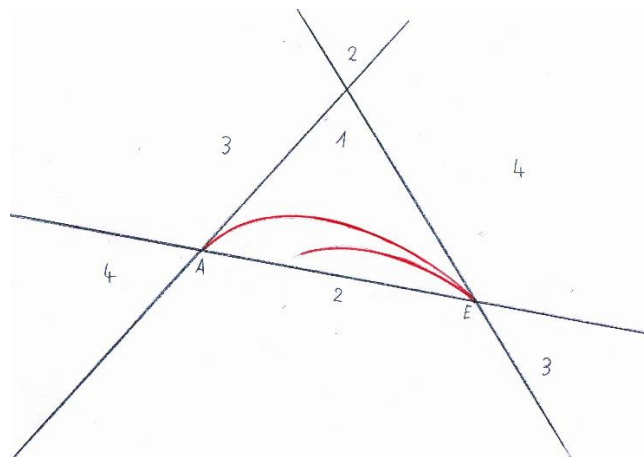


Abbildung 9d

Vergleich der beiden Dualisierungsarten

Einige charakteristische Unterschiede zwischen diesen beiden Formen der Dualisierung springen ins Auge, wenn man dieselbe Form auf beide Arten umbildet. Dies wird im Folgenden an einigen Beispielen veranschaulicht. Die erste betrachtete Form im Kreis (Abb. 10a, 10b) weist eine Anzahl von Wendestellen auf, insgesamt sind es acht. Wir betrachten jeweils zuerst die durch Inversion entstandene Gegenform, dann diejenige, die durch die Dualisierung der Punkte in Geraden entsteht. Bei der Inversion ergibt sich eine Gegenform, die gegenüber der ursprünglichen Form in ihrer Position gedreht ist, ansonsten aber dieselben Merkmale aufweist. Die tangential entstandene Form weist demgegenüber eine wesentlich stärkere Veränderung auf: Wo die ursprüngliche Form nach innen eingebuchtet erscheint, stülpt sich die Gegenform nach aussen, indem sich je zwei Wendestellen in Dornspitzen umwandeln. Betrachtet man nur die Einbuchtungen, bzw. Ausbuchtungen, so hat man bei der Inversion dasselbe Verhältnis. Schaut man auf

das Charakteristische der Form, so findet man, dass hier gegenüber der Ausgangslage etwas Neues entstanden ist. Die Wendestellen sind verschwunden, stattdessen treten Dornspitzen in gleicher Anzahl auf. Durchläuft man diese Kurve, so ergibt sich, dass sie sich an vier Stellen selbst überkreuzt, man kommt an diese Stellen, die sogenannten Doppelpunkte, jeweils zweimal. Dem entspricht die Tatsache, dass die ursprüngliche Form vier Doppeltangenten aufweist: Wandert man mit einer Tangente der Kurve entlang, so gibt es vier Stellen, wo die Tangente jeweils zwei Kurvenpunkte berührt. An diesen Stellen nimmt die Tangente beim Durchlaufen der Kurve zweimal dieselbe Lage ein. Die in Abbildung 10c und 10d in den Kreis gelegte Form besteht aus vier Bogenteilen, die miteinander verbunden sind. Die hier nach Innen weisenden Spitzen unterscheiden sich von der vorher beschriebenen Dornspitzen dadurch, dass die Tangente, wenn sie die Spitze durchläuft, nicht in jedem Moment in ihrer Lage eindeutig bestimmt ist. Will sie die Spitze durchlaufen, so muss sie, um von dem einen Bogenteil zum anderen zu gelangen, ein Winkelfeld überstreichen. Sie führt also innerhalb des äussersten Punktes der Spitze eine Drehbewegung aus. Innerhalb derselben verliert sie die Eigenschaft, Tangente an die Kurve zu sein. Dies ist bei der Dornspitze anders. Hier ist die Tangente in jedem Kurvenpunkt eindeutig in ihrer Lage bestimmt. Entsprechend ergeben sich hier andere Formen der Dualisierung. Abbildung 10c zeigt zunächst die Inversion, die die konvexen Bogenteile in solche verwandelt, die leicht konkav liegen, sich aber einem Quadrat annähern. Überraschend ist die Form, die Abbildung 10d zeigt. Jedem inneren Bogen entspricht ein solcher ausserhalb des Kreises, der eine schwächere Biegung aufweist. An der Stelle, wo je zwei Bögen in einer Spitze zusammenkommen, muss man mit der Tangente einen Dreiviertelkreis überstreichen, um vom einen Bogenteil zum nächsten zu kommen. Die Spitzen schmiegen sich jeweils an diejenige Gerade an, die die Polare zu der nach innen gebogenen Spitze der ursprünglichen Form ist. Da diese eben keine Dornspitze darstellt, zeigt die polarisierte Form auch keine Wendestelle. Auf den ersten Blick könnte man sich darüber wundern, dass die polarisierte Form neben vier Doppelpunkten auch vier Doppeltangenten aufweist. Betrachtet man die ursprüngliche rote Form genauer, so stellt man fest, dass diese nicht nur vier offensichtliche Doppeltangenten aufweist, denen in der Polarisierung die Doppelpunkte entsprechen, sondern auch vier Doppelpunkte, denen die Doppeltangenten zugeordnet sind. Denn in jede der Spitzen kommt die Tangente zweimal zu liegen. Nähert man sich z. B. der linken oberen Spitze, von links aussen kommend, so gelangt die Tangente zunächst in eine annähernd waagrechte Lage. Um in den nächsten Bogenteil zu gelangen, muss sie zunächst im Punkt der Spitze drehen, bis sie in eine annähernd senkrechte Lage kommt. Sie durchläuft also jeden der Spitzenpunkte als Tangente zweimal.

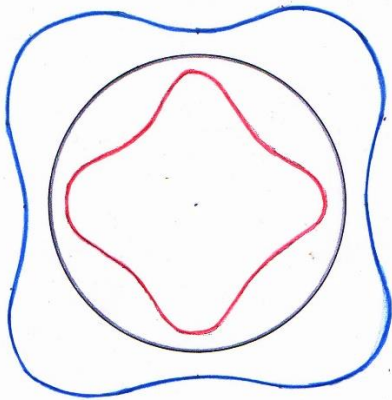


Abbildung 10a

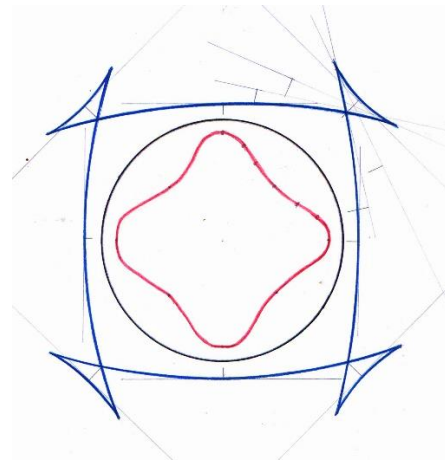


Abbildung 10b

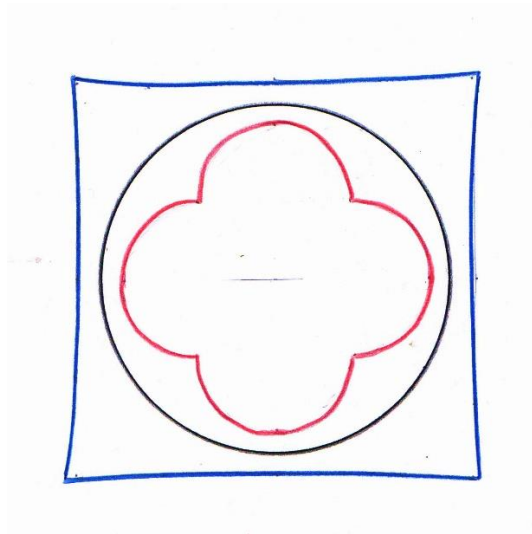


Abbildung 10c

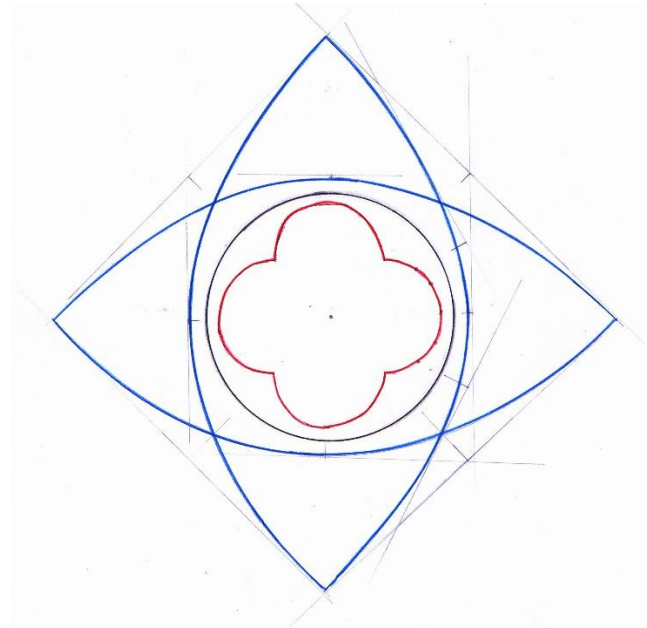


Abbildung 10d

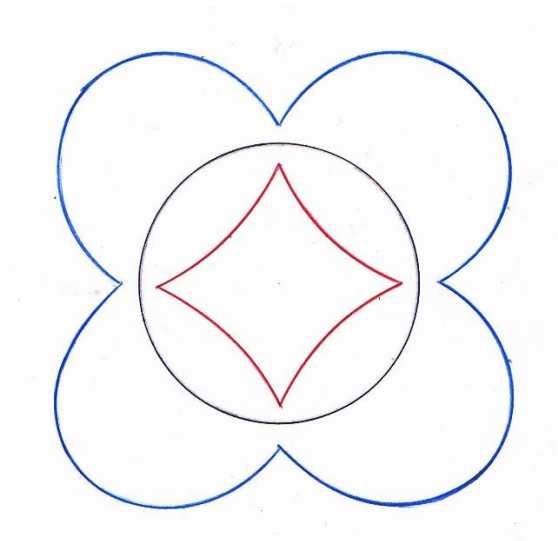


Abbildung 10e

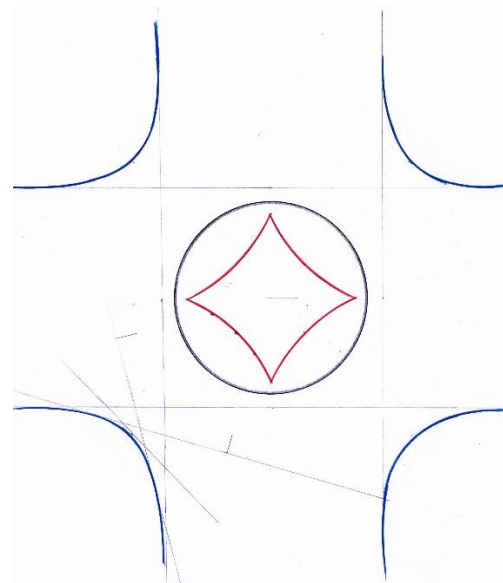


Abbildung 10f

Anders in den nächsten beiden Abbildungen: Die nach aussen gekehrten Spitzen (Abb. 10e und 10f) stellen Dornspitzen dar. Die Inversion zeigt, dass den jeweils leicht konkaven Bogenteilen aussen stärker konvexe Bögen entsprechen. Abbildung 10f zeigt ein vollständig anderes Bild: Die entstehende Aussenform läuft viermal durch die Unendlichkeit und die durch die Polarisierung der Dornspitzen zu erwartenden Wendestellen scheinen sich nicht zu ergeben. Bei genauerem Hinsehen sind sie doch vorhanden, um sie zu finden, muss man den Durchgang durch die Unendlichkeit genauer betrachten. Läuft ein Punkt auf einer Geraden in die Unendlichkeit und durchbricht dieselbe, so kommt er nicht nur von der anderen Seite wiederum in die Sichtbarkeit, er ändert auch, jedenfalls für den aussenstehenden Beobachter, sein Verhältnis zur Geraden. Lag er vorher oben auf derselben, so ist er nach dem Gang durch die Unendlichkeit unten. Mit dem Ausspruch: „Bei einem Durchgang durch das Unendliche kommt man immer auf die andere Seite!“,

weist Locher-Ernst daraufhin, dass sich beim Durchgang durch die Unendlichkeit nicht nur rechts und links, sondern ebenso vorne und hinten sowie oben und unten vertauschen.⁸ Eigenartigerweise erscheint für den aussenstehenden Beobachter dasjenige als Seitenwechsel, was für den laufenden Punkt selbst der normale Fortgang seiner einmal eingeschlagenen Bewegung ist. Vielleicht kann man sagen, dass sich das Unendliche demjenigen Betrachter, der nicht selbst mit Bewusstsein in ihm darinsteht, in der Wirkung zeigt, die es in den teilweise im Endlichen zu erfassenden Phänomenen hervorruft. Im Unendlichen selbst stellen sich dieselben Phänomene dann nochmals in einer anderen Weise dar. Kehren wir zurück zur Abbildung 10f: Die vier blauen Bögen, von denen auf der Zeichnung nur Ausschnitte zu sehen sind, schmiegen sich jeweils an Geraden an, mit denen sie im Unendlichen zusammenfallen. Würde der Bogen nun auf reguläre Weise z. B. nach rechts herauslaufen, so müsste er sich, wenn er aus der Unendlichkeit zurückkommt, links unterhalb derselben Geraden befinden. Genau das tut er aber nicht. Er befindet sich auf derselben Seite der Geraden. Folglich muss in diesem Fall in der Unendlichkeit eine Besonderheit auftreten und diese ist eben die gesuchte Wendestelle. Alle vier zu erwartenden Wendestellen sind vorhanden, aber da sie in die Unendlichkeit gerückt sind, sehen sie eben nicht so aus, wie wir es vom Endlichen her kennen. Jedes Mal, wenn die Tangente in einer der Geraden zu liegen kommt, an die sich die Kurve im Zulaufen auf die Unendlichkeit schmiegt, liegt sie genau in der Wendestelle. Dass es möglich ist, mit der Tangente nacheinander die einzelnen Äste der Kurve zu durchlaufen, ohne die Drehrichtung zu ändern, gehört zu den Geheimnissen, die die Unendlichkeit birgt. Denn während man im Endlichen einen einfachen Bogen ohne Änderung der Drehrichtung durchläuft, muss man die Drehrichtung ändern, sobald sich der Bogen durch die Unendlichkeit zieht. Entsprechend Umgekehrtes gilt für die Wendestelle: Liegt diese im Endlichen, so ändert die Tangente in ihr die Drehrichtung, liegt sie hingegen im Unendlichen, so tut die Tangente dies nicht.⁹

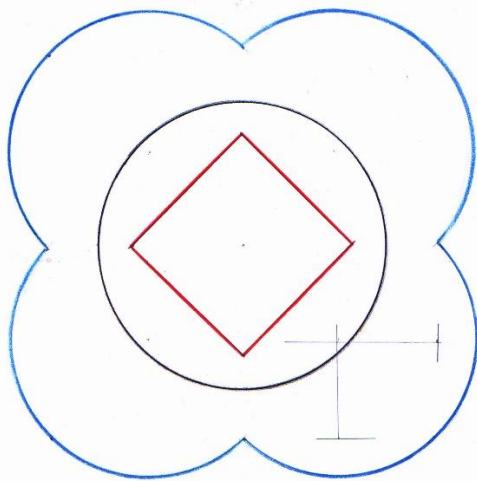


Abbildung 10g

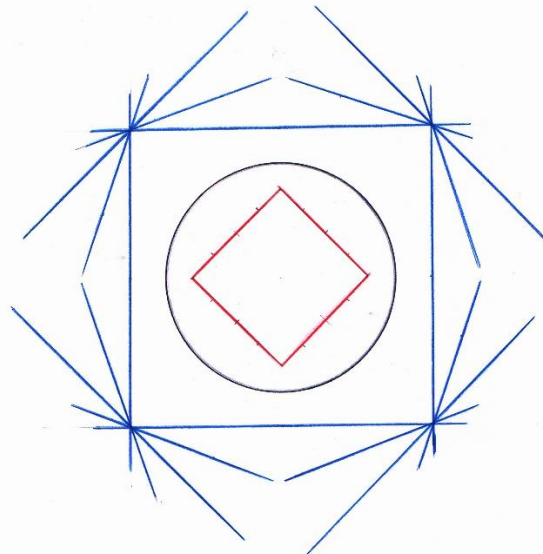


Abbildung 10h

⁸ Locher-Ernst (2016), Kap.: Das Unendlichferne in der Geometrie. S. 61

⁹ Man findet bei Locher-Ernst (2016a), Kap.: Die Singularitäten eines elementaren Bogens. S. 58f. weiterführende Ausführungen bezüglich der Frage, wie die Singularitäten im Unendlichen aussehen.

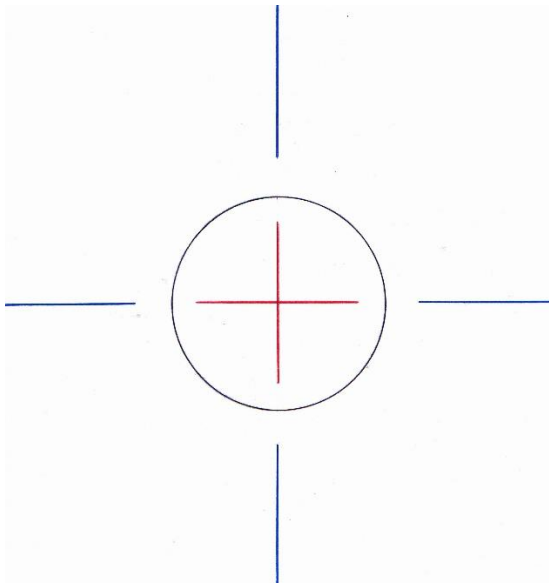


Abbildung 10i

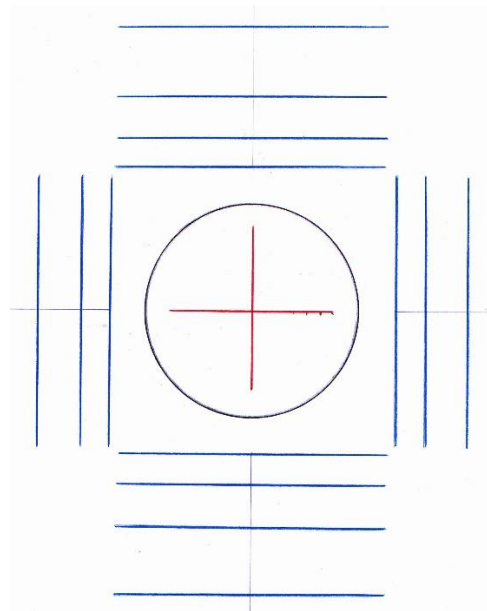


Abbildung 10j

Die nun folgenden Formen sind leichter zu überschauen. In Abbildung 10g und 10h liegt ein Quadrat im Inneren des Kreises. So wie dessen Seiten Ausschnitte aus Geraden darstellen, so besteht die Gegenform, die die Inversion zeigt, aus Ausschnitten von Kreisen. Bildet man hingegen die Polaren zu auf einer Quadratseite liegenden Punkten, so zeigt sich, dass diese durch einen Punkt laufen. Da der Eckpunkt jeweils beiden Quadratseiten angehört, läuft die zu ihm gehörende Polare durch zwei Büschelpunkte und gehört somit ebenfalls beiden an. Die beiden letzten Abbildungen (10i und 10j) zeigen ein in den Kreis gelegtes durch dessen Mittelpunkt laufendes Kreuz. Das Inversionsbild zeigt, dass sich die Linien mit einer Unterbrechung, die dem Abstand des Kreuzes von der Kreisl Linie entspricht, nach aussen fortsetzen. Die Polaren hingegen, die man zu einzelnen Punkten des Kreuzes findet, stehen senkrecht auf der Verlängerung der Linien des Kreuzes.

Das Imaginäre

In Abbildung 4a und 4b hatten wir anhand eines Kreises und einer Ellipse gezeigt, dass alle Geraden, die durch den Pol einer die Form schneidenden Polaren laufen, ihren Pol wiederum auf dieser Polaren haben. Die Konstruktion ist so ausgeführt, dass alle Polaren den Kreis, bzw. die Ellipse schneiden und alle Pole ausserhalb derselben liegen. Was ergibt sich nun, wenn der Pol innerhalb der Form liegt? Jedenfalls wird die Polare dann ausserhalb derselben liegen und keine Schnittpunkte mit derselben aufweisen. In Abbildung 11 ist dies für die Ellipse ausgeführt. Wählt man einen beliebigen Punkt innerhalb derselben und legt durch diesen Geraden, die die Ellipse schneiden, so lässt sich durch die beiden Schnittpunkte einer solchen Geraden mit der Kurve je eine Tangente legen. Diese schneiden sich in einem Punkt und es ergibt sich, dass alle so erzeugten Punkte auf einer Geraden liegen. Diese Gerade ist die Polare des ursprünglich gewählten Punktes. Mit Hilfe eines in einen Kreis gelegten Polardreiecks hatten wir uns die Bewegungsgebärden verdeutlicht, die sich ergeben, wenn sich Pol und Polare in Bezug auf die beiden Fixpunkte, in denen die Polare die Kreisl Linie schneidet, harmonisch bewegen. Abbildung 12 zeigt nochmals die vorliegende Situation: Die Punkte P und Q haben ihre Polaren in den beiden

Linien, die den Kreis schneiden (Rot und Blau). Die Polare des im Kreis liegenden Punktes R ist die grüne Gerade. Für die rote und die blaue Gerade ergibt sich – das hatten wir bereits gesehen – dass die beiden auf ihr liegenden Ecken des Polardreiecks harmonisch liegen in Bezug auf die beiden Fixpunkte, in denen die Gerade den Kreis schneidet. Würde man z. B. die rote Gerade in Richtung des Kreismittelpunktes drehen, so würde sich der zugeordnete Punkt Q nach oben von der Kreislinie wegbewegen. Die Bewegungsrichtung der beiden Punkte ist gegenläufig; sie bewegen sich entweder aufeinander zu oder voneinander weg. Wir greifen nun die zu Anfang des Kapitels offen gelassene Frage nochmals auf: Welche Art von Bewegung ergibt sich für vier Punkte, die harmonisch liegen, auf der grünen Geraden. Hier gibt es keine Fixpunkte, an denen sich die Bewegung direkt sichtbar staut. Offensichtlich steht damit die Frage im Zusammenhang, wie sich auf der Polaren in Abbildung 12 die Bewegung der Punkte gestaltet, wenn man sie hin und her projiziert. Nun ist es schwierig, sich die Bewegung der Punkte auf der grünen Polaren unmittelbar zu veranschaulichen, da diese, wenn man den Punkt R verschiebt, ebenfalls ihre Lage ändert. Um zur Klarheit zu kommen, benötigen wir eine Situation, in der sich die Lage der Polaren nicht ändert.

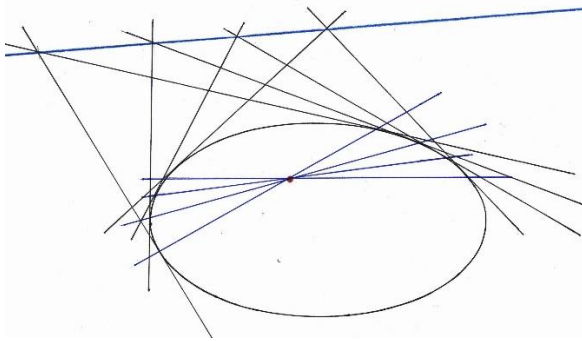


Abbildung 11

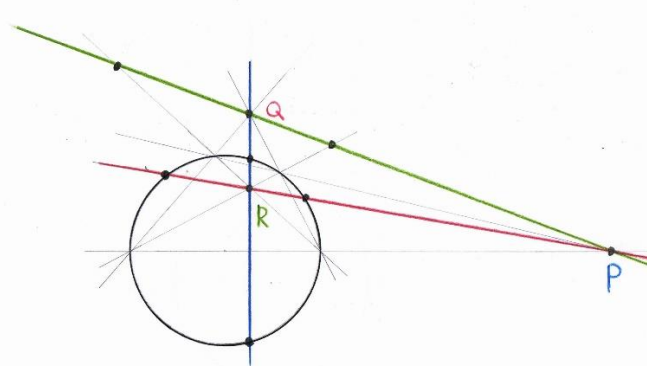


Abbildung 12

Zu diesem Zweck konstruieren wir die Polare eines Punktes im Kreis auf folgende Weise:¹⁰ Man wählt einen beliebigen Punkt, verbindet diesen mit dem Kreisdurchmesser und verlängert die so entstehende Gerade. Durch den gewählten Punkt legt man eine weitere Gerade senkrecht zum Durchmesser (rot). Diese schneidet den Kreis ebenfalls in zwei Punkten. Durch die vier Schnittpunkte legt man ein Viereck. Dessen Seiten schneiden sich in zwei weiteren Punkten. Die Verbindungsgerade dieser Punkte ist die Polare des gewählten Punktes (Abb. 13a). Man sieht sogleich, dass die beiden Schnittpunkte der Seiten gleich weit von dem Punkt entfernt sind, in dem der Durchmesser die Polare schneidet. Da die rote Gerade parallel zur Polaren verläuft, schneidet sie diese im unendlich fernen Punkt. Diese vier Punkte haben offensichtlich harmonische Lage. Dreht man nun die rote Gerade im gewählten Punkt (Abb. 13b), so verändert sich die Lage des Vierecks, nicht aber die der Polaren. Man kann nun die Punkt看egung auf dieser Polaren verfolgen. In diesem Fall entspricht einer Drehung gegen den Uhrzeigersinn eine Wanderung der Punkte nach oben, einer Drehung mit dem Uhrzeigersinn eine solche nach unten. Einzig der Schnittpunkt des Durchmessers bleibt fix. Betrachten wir die Drehung gegen den Uhrzeigersinn: Während der untere Punkt langsam nach oben wandert, läuft der obere Punkt erheblich schneller in die gleiche Richtung. In dem Moment, wo der untere Punkt in den Durchmesserschnittpunkt hineinfällt, ist der obere Punkt im Unendlichen angelangt. In Bezug auf oben und unten tauschen die Punkte nun für den Betrachter ihre Rolle. Der zuvor in die Unendlichkeit gewanderte Punkt

¹⁰ Vgl. dazu Bernhard 1984, Kap.: Der Kreis als Stauprodukt einer Bewegungsgestalt.

kommt nun mit rasender Geschwindigkeit von unten zurück, während der andere langsam nach oben wandert. In dem Moment, wo die rote Gerade eine halbe Drehung ausgeführt hat, haben die beiden Punkte ihre Lage vertauscht, sind aber ansonsten wieder in der zu Beginn (Abb. 13a) gezeigten Position. Offensichtlich entspricht dieser Moment einer Sonderstellung. Denn die beiden Punkte können sich nie näherkommen, als sie hier sind. Sie folgen einander nach, der eine abbremsend, der andere beschleunigend, können sich aber nie erreichen. Nur in diesem einen Augenblick, wo sie gleichweit von dem Durchmesserschnittpunkt entfernt sind, haben sie die gleiche Geschwindigkeit. Versucht man, innerlich die Bewegung zu verfolgen, so kann man erleben, dass hier ein Moment der Stockung oder Stauung auftritt. Dieser Moment entspricht demjenigen, wo in der gegenläufigen Involution die beiden aufeinander zulaufenden Punkte in einem der Fixpunkte zusammenfallen.

Aber hier findet eben kein wirklicher Zusammenfall statt, sondern nur ein angedeutetes Zusammendrängen in einem winzigen Zeitpunkt.

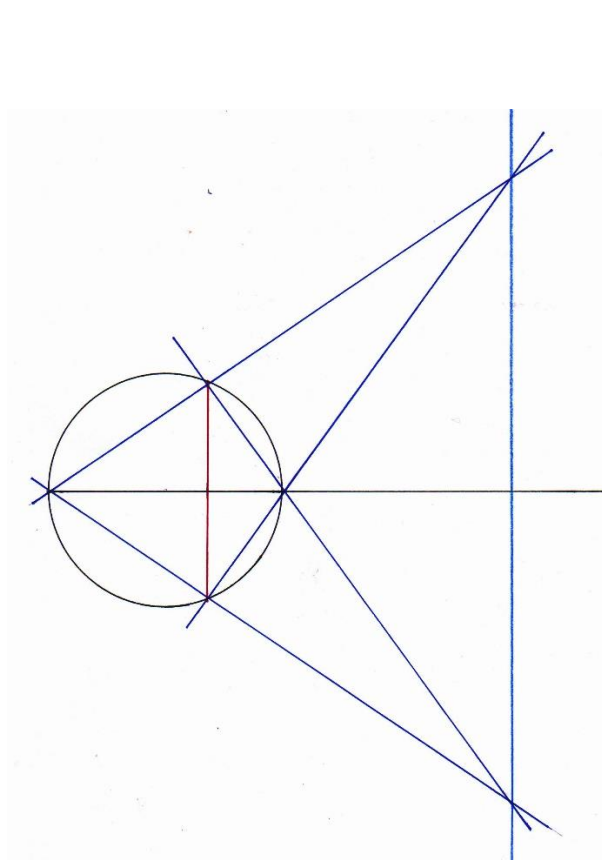


Abbildung 13a

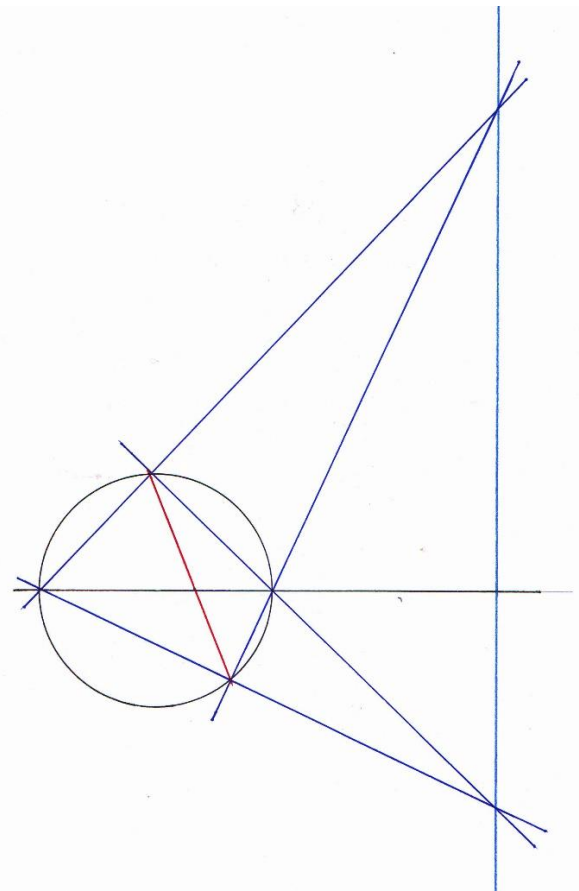


Abbildung 13b

Die Dynamik der Bewegung lässt sich gut verdeutlichen, indem man von der Situation in Abbildung 13a ausgeht. Jeder der beiden betrachteten Punkt durchläuft nacheinander die gekennzeichneten vier Abschnitte der Geraden: Vom Durchmesserschnittpunkt bis zum Schnittpunkt der beiden Viereckseiten beschleunigt die Bewegung langsam, danach nimmt die Beschleunigung rasant zu, bis sie beim Durchgang durch die Unendlichkeit selbst unendlich wird. Danach bremst der Punkt ab, erst wiederum rasend, dann allmählich langsamer werdend, bis zum unteren Schnittpunkt der Viereckseiten. Die letzte Phase, in der die Bewegung den Durchmesser-

schnittpunkt erreicht, ist die langsamste. Den Moment grösster Langsamkeit erreicht der Punkt, indem er diesen überschreitet. Abgesehen von den Grenzlagen, wo die beiden laufenden Punkte entweder mit den Schnittpunkten der Viereckseiten zusammenfallen oder der eine mit dem Durchmesserschnittpunkt und der andere zugleich mit dem Fernpunkt, befindet sich jeweils ein Punkt in einer langsamen Phase und der andere in einer schnellen. Bremst der eine Punkt langsam ab, so beschleunigt der zweite rasend. Beschleunigt der eine Punkt langsam, so bremst der zweite rasend ab. Der Moment, wo die beiden Punkte sich am nächsten kommen, markiert die sogenannten Nahstellen oder Engstellen einer gleichlaufenden Involution.¹¹

Man kann auf diese Weise für jeden innerhalb eines Kreises liegenden Punkt die ausserhalb desselben liegende Polare konstruieren und natürlich auch die Engstellen der gleichlaufenden Involution auf derselben. Je nach Lage von Pol und Polare liegen diese näher zusammen oder weiter voneinander entfernt. Vergegenwärtigt man sich dies, so kann man bemerken, dass der Kreis auf jeder in seiner Ebene liegenden Geraden, sei sie nun schneidend oder nicht, eine Punktströmung erzeugt, die dem Gesetz der harmonischen Lage folgt. In diese Fliessbewegung sind die Kreispunkte in der Weise einbezogen, dass sie durch den Zusammenfall von zwei sonst getrennt voneinander laufenden Punkten entstehen. Dies legt es nahe, sich vorzustellen, dass die sichtbare Form aus normalerweise unsichtbaren Fliessbewegungen heraus gerinnt. Die ganze Ebene ist von Punktströmungen durchzogen, die dem Gesetz der harmonischen Lage folgen. Dort, wo ein aus der Unendlichkeit kommender Punkt und einer, der im Mittelpunkt des – noch nicht sichtbaren – Kreises liegt, aufeinander zulaufen und zusammenfallen, entsteht ein dann sichtbarer Punkt der Kreislinie. Mittelpunkt kann in diesem Fall jeder beliebige Punkt der Ebene sein, da alle Punkte gleichweit von der Unendlichkeit entfernt sind.

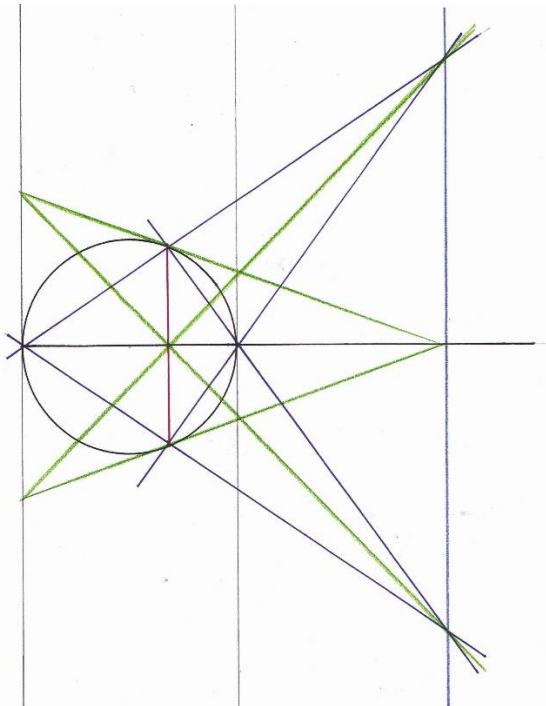


Abbildung 13c

¹¹ Vgl. Bernhard 1988. Dort findet man die Punktströme ausführlich beschrieben.

Beschäftigt man sich näher mit der Lage der Engstellen, so ergibt sich Erstaunliches: Diese selbst bilden eine Gesetzmässigkeit ab, die mit der des Kreises verwandt ist. Zunächst betrachten wir die Anordnung der Engstellen auf einer Reihe von Geraden. Dies geschieht so, dass wir den Pol auf dem Kreisdurchmesser verschieben, sodass wir mehrere zugeordnete Polaren erhalten. Dazu verwenden wir eine Konstruktion, die mit der Vorhergehenden verwandt ist, aber doch leicht abgewandelt wird. Bei wiederholter Anwendung erweist sich diese als praktisch.¹² Wir betrachten dazu die Abbildung 13c. Sie entspricht der Abbildung 13a, wurde aber erweitert. Es werden zunächst die Tangenten an den Kreisdurchmesser gelegt. Wie man sogleich sieht, liegen diese parallel zur Polaren. Nun werden vom Schnittpunkt des Kreisdurchmessers mit der Polaren zwei Tangenten an den Kreis gelegt (grün). Sie berühren den Kreis dort, wo die rote Linie ihn schneidet. Diese beiden Tangenten haben nun auch mit den beiden Parallelen zur Polaren je einen Schnittpunkt und es ergibt sich so ein dem Kreis umschriebenes Vierseit. Ergänzt man das Vierseit um seine beiden Diagonalen, so schneiden diese die Polare in zwei Punkten. Diese beiden Punkte markieren die Engstellen der Involution auf derselben. Mittels dieser Konstruktion kann man relativ einfach die Engstellen auf verschiedenen zueinander parallel verschobenen Geraden konstruieren. In Abbildung 14a ist dies durchgeführt und man sieht, dass die Engstellen der Involution auf einer Hyperbel liegen. Dieselbe Konstruktion lässt sich für alle anderen Kegelschnitte ebenfalls durchführen. Im Falle des Kreises ist die Hyperbel exakt rechtwinklig. Hier ist ein Ast der Hyperbel ausgezogen, der andere nicht, sodass die Konstruktion deutlicher sichtbar ist. Man muss berücksichtigen, dass die Punkte der beiden Hyperbeläste nicht in gleicher Weise entstehen, wie die des Kreises. Sie entstehen nicht durch den Zusammenfall von zwei Punkten, sondern sie markieren die Stellen, an denen die Fliessbewegungen der Punkte, die natürlich immer aufeinander bezogen sind, sich für einen Augenblick stauen. Je näher die Polare dem Kreis kommt, umso dichter kommen die Punkte zusammen, je weiter sie sich vom Kreis entfernt, umso grösser ist deren Abstand. Schiebt man die Polare in Richtung des Kreises so weit, bis sie ihn als Tangente berührt, so fallen die zwei die Engstellen markierenden Punkte in einen Kreispunkt zusammen. Schiebt man die Gerade noch weiter in den Kreis hinein, so wandelt sich die gleichlaufende in eine gegenlaufende Involution mit zwei Fixpunkten um. Denkt man sich die Polare in die Unendlichkeit verschoben, so sind die „Engstellen“ die unendlich fernen Punkte der Asymptoten der Hyperbel (blaue Geraden). Auch auf der Ferngeraden gibt es also ein Kreisen der Punkte.

In der Mathematik hat die Einführung imaginärer Elemente ($i = \sqrt{-1}$) dazu geführt, quadratische Gleichungen, für die es bislang keine Lösung gab, doch lösen zu können. Die so gefundenen Lösungen kann man zeichnerisch nicht in herkömmlicher Weise als Punkte einer Kurve darstellen. Hier haben wir ein verwandtes Problem. In gewisser Weise gehören die strömenden Punktbewegungen zum Kreis, man kann sie aber nicht als Punkte der Kreislinie ausmachen. Man hat in der strömenden Bewegung eines harmonischen Punktwurfes die Darstellung eines imaginären Punktes gefunden.¹³ Da es auf jeder Geraden zwei mögliche Richtungen gibt, in denen sich die Punkte bewegen können, so hat man auf jeder Geraden, die den Kreis nicht schneidet, aber mit ihm in einer Ebene liegt, zwei imaginäre Punkte, die zum Kreis hinzugehören. Nicht die Engstellen als solche sind die imaginären Punkte, sie dienen nur zur Charakterisierung der Fliessbewegung. Die imaginären Punkte lassen sich nicht als Punkt ausdrücken. Sie sind die strömende Bewegung selbst.

Nun erzeugt nicht nur der Kreis, sondern auch jeder andere Kegelschnitt ein solches Strömen von Punkten. Abbildung 14b zeigt dieselbe Konstruktion für die Ellipse. Auch hier beschreiben die

¹² Vgl. Edwards 1988, Chapter: The Imaginary part of a conic.

¹³ Zum Imaginären vgl. z. B. Locher-Ernst 1970a, Locher-Ernst 1980, Adams 1965.

Engstellen eine Hyperbel, allerdings keine rechtwinklige. Je nach Lage sind die Hyperbeläste enger oder weiter geöffnet.

Während beim Kreis alle Durchmesser die gleiche Länge haben, ergeben sich bei der Ellipse Verschiedenheiten. Man kann die Konstruktion für jeden beliebigen innerhalb der Ellipse liegenden Punkt durchführen, wenn man ihn mit dem Mittelpunkt derselben verbindet, der in der Mitte zwischen den beiden Brennpunkten liegt. Abbildung 14c zeigt ein Beispiel. Führt man die Konstruktion für eine Parabel durch, so liegen die Engstellen wiederum auf einer Parabel (Abb. 14d). Wählt man als Ausgangsform eine rechtwinklige Hyperbel, so liegen die Engstellen auf einem Kreis (Abb. 14e), wählt man eine andere Hyperbel, so ergeben sich Ellipsen. Man hat es hier mit einer faszinierenden und zugleich rätselhaften Harmonie zu tun. Jedem Kegelschnitt sind in der Ebene, in der er liegt, Punktströmungen zugeordnet, deren Engstellen weitere Kegelschnitte ergeben, die gleichsam unsichtbar bleiben, dem ersten aber eindeutig zugeordnet sind. Greifen wir z. B. die Ellipse heraus, so kann man mit ihrer Hilfe im Grunde genommen unzählig viele Hyperbeln konstruieren, die alle mit ihr verbunden sind, aber nicht wie diese in die Sichtbarkeit treten, sondern gleichsam in der Potentialität bleiben. So erscheint das Unsichtbare einerseits strenger Gesetzmässigkeit entsprechend, andererseits viel reicher als das sichtbar gewordene, welches nur einen kleinen Ausschnitt aus einer unendlichen Möglichkeitsfülle darstellt. Die Entdeckung dieser Verhältnisse kann man als Ausdruck der Tatsache verstehen, dass das menschliche Bewusstsein dazu reif geworden ist, seine Bindung an die sinnliche Erfahrung zumindest teilweise abzulegen und sich dem nicht Sinnlichen oder Übersinnlichen forschend zu nähern.¹⁴

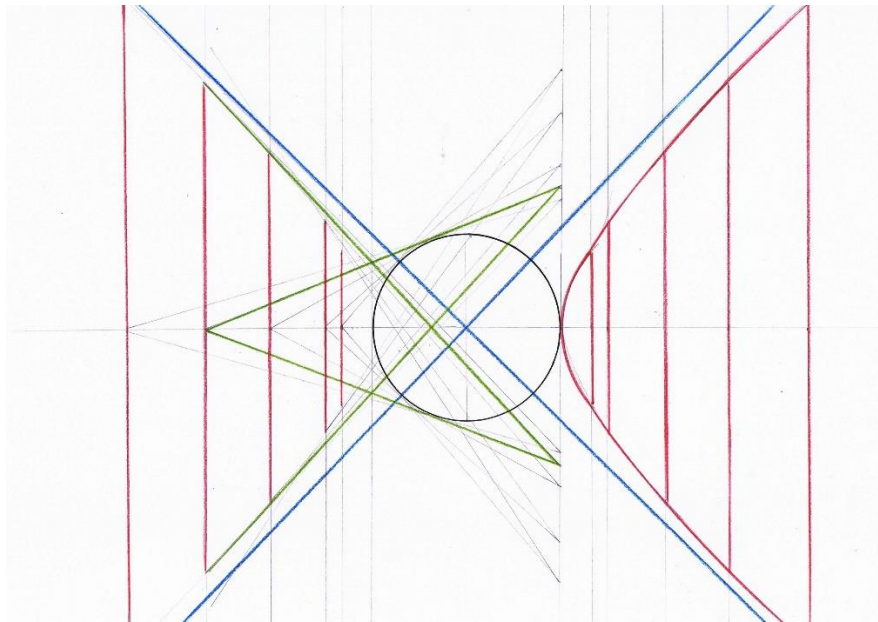


Abbildung 14a

¹⁴ Die Entdeckung der Möglichkeit, imaginäre Punkte als harmonische Punktströme auf Geraden darzustellen, geht auf Christian v. Staudt zurück. Vgl. v. Staudt 1856.

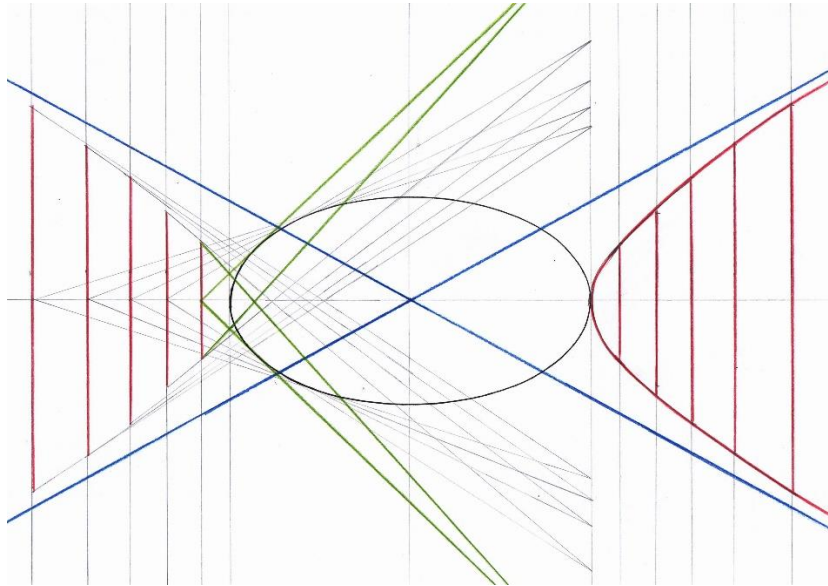


Abbildung 14b

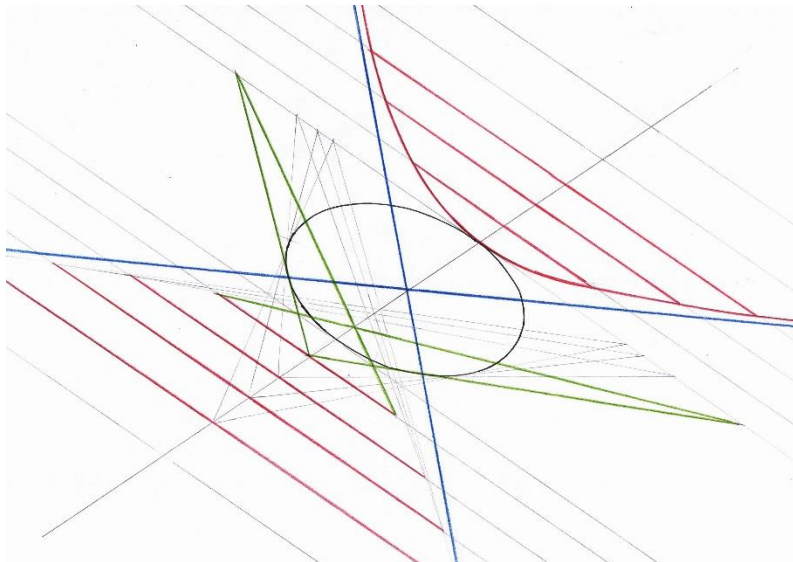


Abbildung 14c

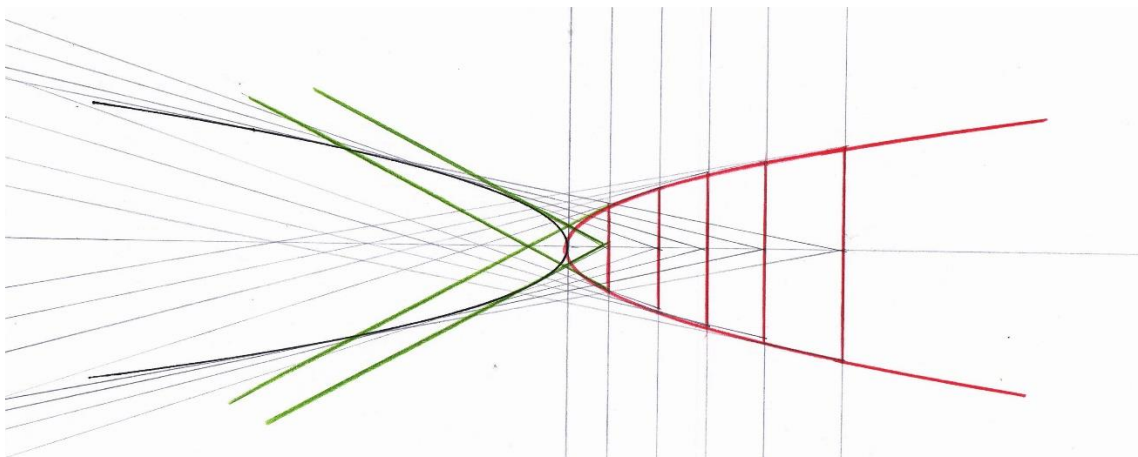


Abbildung 14d

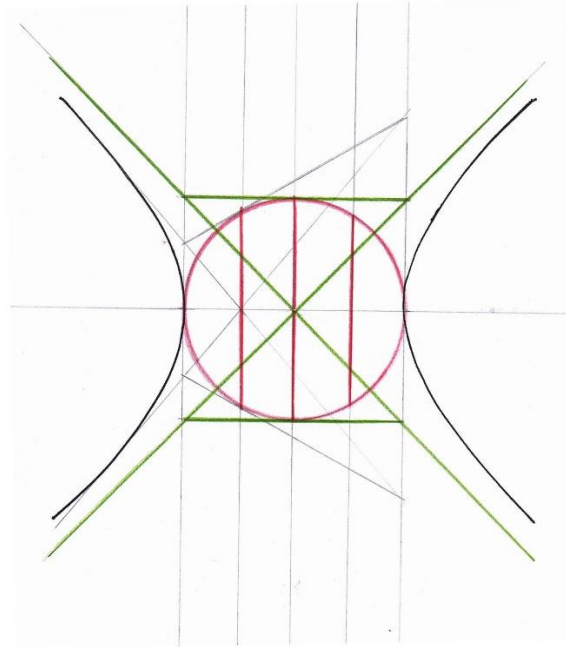


Abbildung 14e