# VIII. Anhang

## Konstruktionsanleitungen für Polarisierungen am Kreis (Gegenkurven)

Grundsätzlich gibt es vier Möglichkeiten: Entweder ist die Polare gegeben oder der Pol. Die Polare kann den Kreis schneiden oder nicht, der Pol kann innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegen.

1. Wenn die Polare innerhalb des Kreises liegt, kann man durch die beiden Schnittpunkte der Polare mit dem Kreis die Tangenten ziehen. Die Tangente liegt immer rechtwinklig zum Radius des Kreises, der in den Berührungspunkt der Tangente mündet. Der Schnittpunkt der beiden konstruierten Tangenten ist der gesuchte Pol.
2. Wenn die gegebene Polare ausserhalb des Kreises liegt, so steht sie auf jeden Fall rechtwinklig auf einem verlängerten Kreisradius. Auf diesem halbiert man den Abstand vom Kreismittelpunkt bis zum Schnittpunkt mit der Polaren und schlägt von dort einen Kreis, dessen Durchmesser der Strecke vom Kreismittelpunkt bis zum Berührungspunkt mit der Polaren entspricht (S. Abb. 76). Die beiden sich ergebenden Schnittpunkte mit dem ursprünglichen Kreis verbindet man. Der Schnittpunkt dieser Verbindungsgeraden mit dem Kreisradius ist der Pol.
3. Liegt ein gegebener Pol ausserhalb des Kreises, so verbindet man ihn mit dem Kreismittelpunkt. Wie oben halbiert man die so gewonnene Strecke und schlägt von diesem Punkt wiederum einen Kreis mit dem Durchmesser der ganzen Strecke. Es ergeben sich zwei Schnittpunkte mit dem ursprünglichen Kreis. Verbindet man diese, so hat man die Polare.
4. Liegt der gegebene Pol innerhalb des Kreises, so verbindet man ihn mit dem Kreismittelpunkt und verlängert diese Gerade. Durch den Pol zieht man eine senkrecht zum verlängerten Radius stehende Gerade. Diese schneidet den ursprünglichen Kreis in zwei Punkten. Durch diese beiden Schnittpunkte legt man wiederum je eine Tangente an den Kreis. Durch den Tangentenschnittpunkt legt man nochmals eine Gerade, die senkrecht auf dem verlängerten Kreisradius steht. Diese ist die gesuchte Polare.

Die beiden in Kapitel vier gezeigten Metamorphosenreihen sind überwiegend konstruiert worden ausgehend von Polen, die im Kreis liegen. Man legt einfach auf der innerhalb des Kreises verlaufenden Kurve eine Anzahl von Punkten fest. Zu jedem Punkt konstruiert man die Polare. Die Polaren hüllen die Gegenkurve (die zu konstruierende Kurve) tangential ein. Eine Schwierigkeit besteht allerdings darin, eine genügende Anzahl von Polaren in ausreichender Exaktheit zu konstruieren. In manchen Fällen ist es einfacher, den Abstand der Polaren vom Pol zu berechnen: Man quadriert den Kreisradius und dividiert das Ergebnis durch den Abstand des Poles vom Kreismittelpunkt. Das Ergebnis gibt den Abstand der Polaren zum Kreismittelpunkt an. Hat man beispielsweise einen Kreis mit einem Radius von 6 cm und einen Pol, der im Abstand von 3 cm zum Mittelpunkt liegt, so ergibt sich ein Abstand der zugehörigen Polaren zum Mittelpunkt von 12 cm. 6 zum Quadrat ergibt 36. 36 dividiert durch 3 ergibt 12.

Die Gegenkurve schmiegt sich an die konstruierten Tangenten an und manchmal ist es etwas knifflig, ihren Verlauf zu ermitteln. Es gibt aber eine Reihe von Gesetzmässigkeiten, die bei solchen Polarisierungen auftreten, die interessant und hilfreich sind. Ein schwach gekrümmter Bogen wird in einen stärker gekrümmten polarisiert und umgekehrt. Die konkave oder konvexe Form der Biegung bleibt erhalten. Eine Kurve, die dem Kreismittelpunkt nahe kommt, hat ihr Gegenstück weit aussen. Verläuft eine Kurve nahe an der Kreislinie, so nähert sich ihre polare Entsprechung an, berührt eine Kurve mit einem Punkt die Kreislinie, so begegnet sie sich in diesem Punkt mit der Tangente ihrer polaren Kurve. Konzentrische Kreise werden wieder zu konzentrischen Kreisen. Kreise, die durch den Mittelpunkt des ursprünglichen (polarisierenden) Kreises laufen, werden zu Parabeln, kleinere Kreise, die den Mittelpunkt desselben nicht in ihrem Innenbereich haben, werden zu Hyperbeln, Kreise, bei denen der Mittelpunkt des polarisierenden Kreises in ihrem Innenbereich liegt, werden wiederum zu Kreisen. Hat die Ausgangsform einen Doppelpunkt (einen Punkt, der zweimal überschritten wird, wenn man einen Punkt die Form durchlaufen lässt), so hat die Gegenform eine Doppeltangente (eine Tangente, die, wenn sie der Kurve entlang läuft, zweimal in dieselbe Lage kommt). So hat zum Beispiel die Form einer Acht einen Doppelpunkt und zwei Doppeltangenten, die Gegenform muss folglich zwei Doppelpunkte und eine Doppeltangente haben. Das Berücksichtigen dieser Polaritäten kann die Orientierung bei der Konstruktion erleichtern, so liegt zum Beispiel in den Abbildungen 64 bis 66 der Doppelpunkt der Gegenform im Pol der Doppeltangente. Um weitere Polaritätsgesetze darzustellen, muss man einen Schritt weiter in die Phänomenologie gebogener Kurven eintreten. In ausführlicher Weise findet man diese Phänomenologie bei Locher.[1] Hier nur einige grundsätzliche Hinweise zu diesem Thema. Locher bezieht sich nicht speziell auf solche Kurven, deren Punkte mittels einer Formel in ein Koordinatensystem gelegt werden können, sondern auf gebogene Linien in der Ebene, unabhängig von deren Regelmässigkeit. Dies ermöglicht eine Sichtweise auf das Problem der Biegung, die für den Bereich der Linienkunst von Interesse sein könnte. Er qualifiziert Kurventypen, je nachdem, wie sich ein die Kurve durchlaufender Punkt oder eine der Kurve entlang laufende Tangente verhalten. Eine komplexere Kurve kann aus mehreren verschiedenartigen Teilstücken zusammengesetzt sein. Ein einfacher Bogen (Abb. 77) zeichnet sich dadurch aus, dass er von einem Punkt ohne Richtungsänderung durchlaufen werden kann und das eine Tangente an ihm entlang laufen kann, ohne ihre Drehrichtung zu wechseln. Bei einer Wendestelle (Abb. 78) läuft der Punkt ohne Richtungsänderung, aber die Tangente ändert ihre Drehrichtung. Bei einer Dornspitze (Abb. 79) bleibt umgekehrt die Drehrichtung der Tangente unverändert, aber der Punkt ändert seine Richtung. Bei einer Schnabelspitze (Abb. 80) ändert sowohl der Punkt seine Richtung als auch die Tangente. Offensichtlich gibt es nur diese vier Möglichkeiten von Biegung. Die gerade Strecke bleibt zunächst genauso unberücksichtigt, wie die Ecke. Zwar kann der Punkt diese beiden Elemente auch durchlaufen, bei der Tangente wird das aber schwieriger. Trifft sie auf eine Gerade, so kann sie nicht durch minimale Drehung von einem Punkt zum nächsten gelangen. Fällt sie mit der Geraden zusammen, so wird unbestimmt, von welchem Punkt sie Tangente ist, sie muss das gerade Teilstück der Kurve gleichsam entlang rutschen, bis sie zur nächsten Biegung gelangt. Trifft sie auf eine Ecke, so muss sie ein Winkelfeld überstreichen, um zum nächsten Punkt zu gelangen. Ecken und Strecken sind also keine Biegungen. Locher, meisterhaft geschult in der Bildung von Polaritäten, untersucht diese vier Kurventypen noch weiter. Er legt auf eine Kurve einen festen Punkt P und legt die Tangente p in diesem Punkt an die Kurve. Nun lässt er einen beweglichen Punkt X der Kurve entlang laufen und verfolgt, wie sich die Verbindungsgerade XP in dem Punkt P dreht. Gleichzeitig schaut er auf den Schnittpunkt der Tangente x im Punkt X mit der Tangente p und charakterisiert dessen Bewegung. Das Laufen des Punktes entlang der Kurve qualifiziert er also an einer Drehbewegung, das Drehen der Tangente wird durch den Schnittpunkt charakterisiert, den ihre Bewegung auf einer weiteren Geraden hinterlässt, also durch eine Bewegung, die gerade nicht dreht, sondern nur vorwärts und rückwärts läuft. In Abbildung 81 ist dies für den einfachen Bogen dargestellt.[2] Erstaunlicherweise ergeben sich so für die Wendestelle und für die Dornspitze genau entgegengesetzte Charakterisierungen als in dem Fall, in dem man die Spur des Punktes oder der Tangente auf der Kurve selbst verfolgt. Auf jeden Fall kommt Locher zu dem Ergebnis, dass der einfache Bogen und die Schnabelspitze jeweils zu sich selber polar sind, die Wendestelle hingegen ist polar zur Dornspitze und die Dornspitze ist polar zur Wendestelle. Das Eigentümliche ist nun, dass diese Einsichten, obwohl sie nicht durch Polarisierung am Kreis, sondern durch völlig freie Polarisierung gewonnen worden sind, auch für die Polarisierung am Kreis Gültigkeit besitzen. Ein einfacher Bogen wird also wieder zu einem einfachen Bogen, eine Schnabelspitze polarisiert sich zu einer Schnabelspitze, aus einer Wendestelle wird eine Dornspitze und umgekehrt. Auch diese Polaritätsgesetze können beim Konstruieren hilfreich sein, so liegen z. B. in den Abbildungen 67 und 68 die beiden Dornspitzen in der Polare des Punktes, in dem die Kurve wendet. Allgemein ist es empfehlenswert, sich zunächst an einfachen Elementen zu üben, zum Beispiel nur einen einfachen Bogen oder nur eine Wendestelle zu polarisieren und zu schauen, wie sich die polarisierte Kurve verändert, indem man die Ausgangskurve ein wenig verschiebt. Man kann dabei bereits einige Überraschungen erleben und gewinnt nach und nach grössere Sicherheit in der Ermittlung der polarisierten Kurve.[3]

[1] Locher Ernst, 2016a

[2] Eine übersichtliche und leicht nachvollziehbare Darstellung dieser Art der Betrachtung für alle vier Kurventypen findet man bei Schuberth, 2000

[3] Einige Anregungen für solche Polarisierungen findet man bei Whicher, 1970

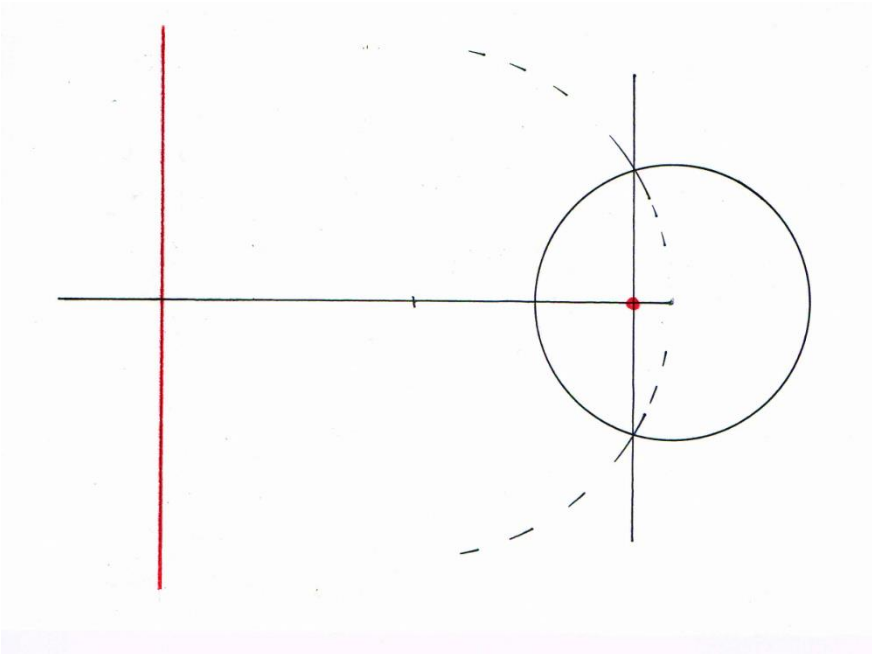

Abb. 76

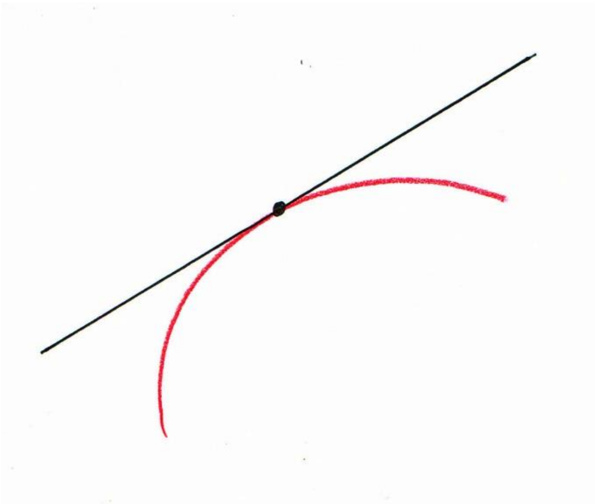

Abb. 77

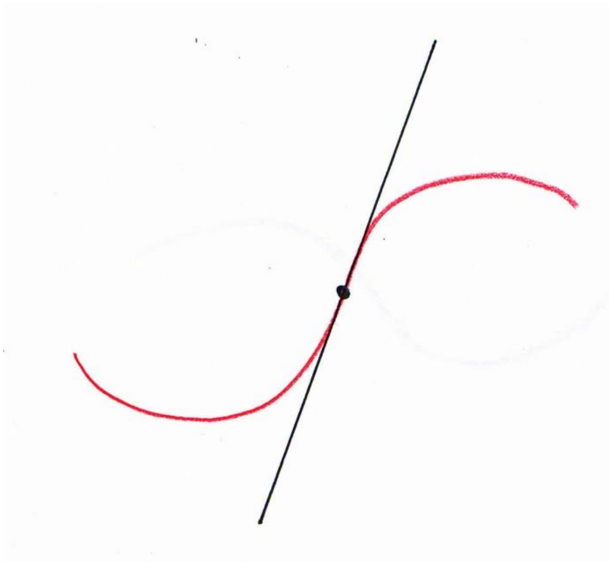

Abb. 78

Abb. 79

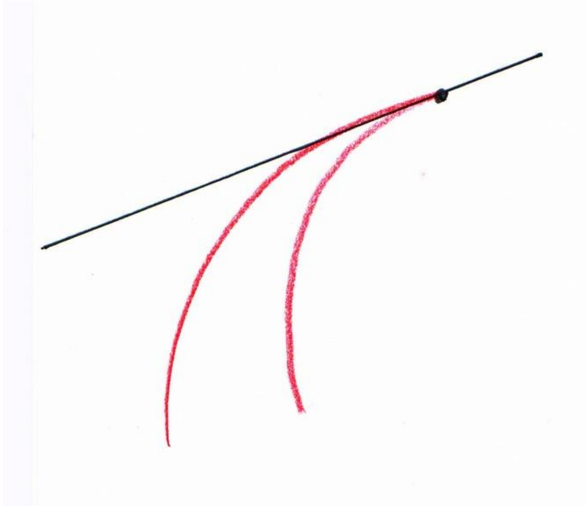

Abb. 80

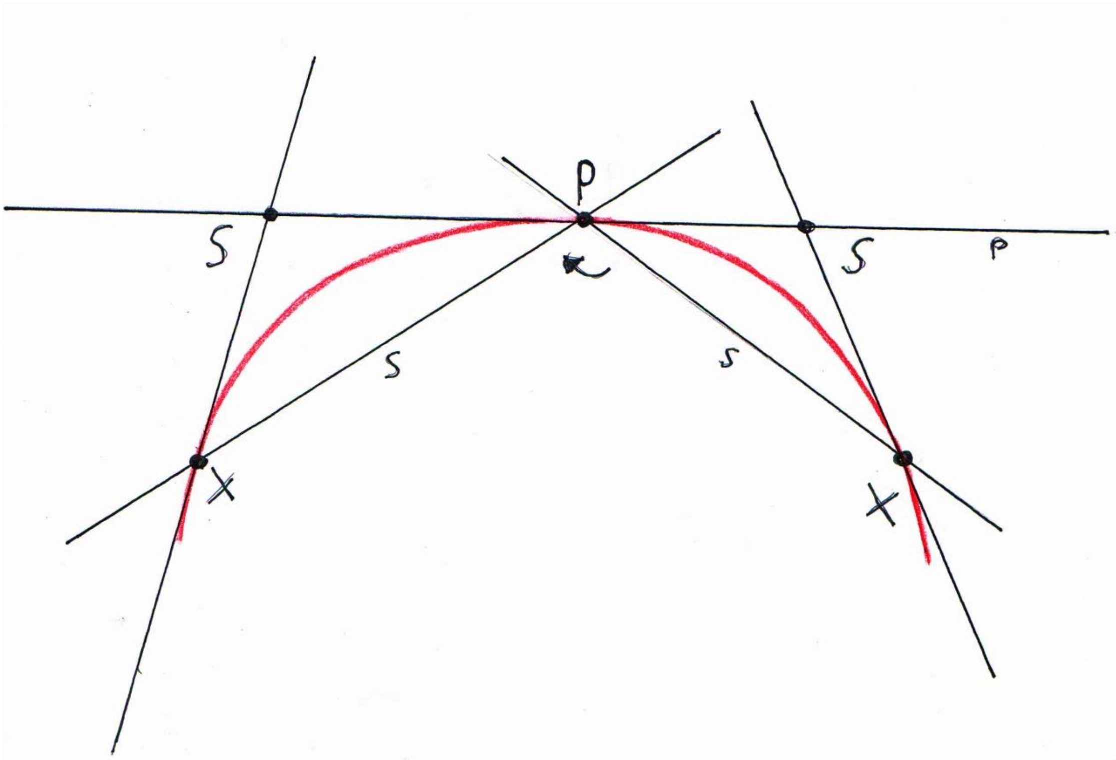


Abb. 81