

Die Zahl Fünf oder: Wie Kegelschnitte entstehen

Anordnungseigenschaften

Im elementaren Rechnungsunterricht spricht man gelegentlich von der Kraft der Fünf. Man hat festgestellt, dass es Kindern, die mit dem Erlernen elementarer Rechenoperationen Mühe haben, leichter fällt, wenn sie zunächst einmal zu einem vollen Zehner fünf Einer dazutun oder wegnehmen können und nicht sogleich mit beliebigen Mengen operieren müssen. Schliesslich hat man ja auch fünf Finger an jeder Hand. In der projektiven Geometrie erweist sich die Zahl Fünf noch in anderer Hinsicht als bedeutungsvoll.¹ Mit dieser Zahl ist nämlich eine besondere Eindeutigkeit verbunden. Legt man drei Geraden in eine Ebene, so kann man diese in beliebiger Reihenfolge z. B. mit den Buchstaben a, b und c bezeichnen. Ich kann mit jeder der Geraden beginnen und dann fortfahren, wie ich will; immer kann ich ein dreiseitiges Gebiet so umfahren, dass ich von a über b und c zurück nach a gelange. Keine der verschiedenen möglichen Bezeichnungen sticht vor der anderen besonders heraus, alle sind gleichwertig. Zwei der Möglichkeiten sind in Abbildung 1a gezeigt. Ähnliches kann ich mit vier Geraden in einer Ebene machen. Auch hier gibt es verschiedene Möglichkeiten, wie ich aufeinanderfolgende Geraden mit den Buchstaben a, b, c und d bezeichnen kann und jede derselben ermöglicht mir, von a ausgehend über b, c und d nach a zurückzukehren. Ich kann die Geraden legen wie ich will, mit der einzigen Bedingung, dass nicht mehr als zwei Geraden durch einen Punkt gehen dürfen. Dann ergibt sich kein Gesichtspunkt, der eine der möglichen Reihenfolgen vor der anderen bevorzugt. Ich kann zwar sagen, dass ich mich auf das im Endlichen umschlossene Gebiet beziehen will, aber in der projektiven Geometrie ist dies nur eine Möglichkeit von mehreren. Ich kann ebenso gut eines der durch die Unendlichkeit laufenden Vierecksgebiete wählen (s. Abbildung 1b).

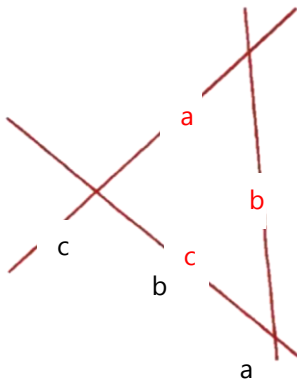


Abbildung 1a

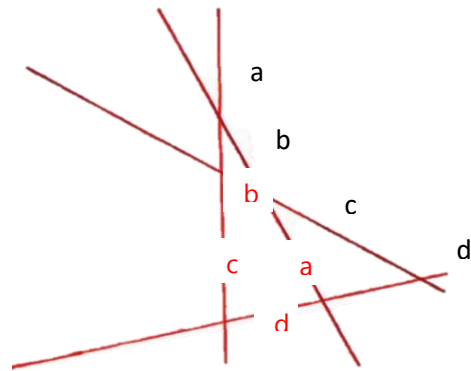


Abbildung 1b

Sobald ich fünf Geraden in eine Ebene lege, ist dies anders. Wie wir gesehen hatten, unterteilen drei Geraden die Ebene in vier dreiseitige Gebiete und vier Geraden rufen eine Unterteilung in vier dreiseitige und drei vierseitige Gebiete hervor. Nehme ich eine fünfte Gerade hinzu, so erzeugt

¹ Es gibt auch sonst verschiedene Hinweise auf Bedeutsames, das mit der Fünffzahl verknüpft ist. So existieren z. B. fünf platonische Körper und wenn man ein regelmässiges Fünfeck ohne Zuhilfenahme eines Winkelmessers konstruieren möchte, so kann man dies mit Hilfe des goldenen Schnittes tun. Die Konstruktion zeichnet sich durch besondere Harmonie aus. Der Sachverhalt ist allgemein bekannt. Eine originelle Darstellung findet sich z. B. bei Bindel 1985

diese auf jeden Fall ein fünfseitiges Gebiet. Dieses kann sowohl im Endlichen geschlossen sein als auch durch die Unendlichkeit laufen, es ist aber nicht möglich, dass kein fünfseitiges Gebiet oder mehrere derselben entstehen. Weiter ergeben sich jeweils fünf dreiseitige und fünf vierseitige Gebiete. In Abbildung 2a ist das fünfseitige Gebiet geschlossen und die dreiseitigen Gebiete ebenfalls. Sie gruppieren sich wie die Zacken eines Fünfsterns um das innere Fünfeck herum. Die vierseitigen Gebiete haben jeweils an der Spitze eines Sternzackens eine Ecke, ziehen sich durch die Unendlichkeit und sind durch diese mit dem gegenüberliegenden Gebiet verbunden, welches an die drei übrigen Ecken angrenzt. Will man von dieser Ausgangssituation eine Öffnung des fünfseitigen Gebietes erreichen, so kann man entweder eine Ecke oder eine Gerade des fünfseitigen Gebietes durch die Unendlichkeit laufen lassen.² Abbildung 2b zeigt die Situation, die sich im ersten Fall ergibt. Die durch die Unendlichkeit gelaufene Ecke kommt von unten wieder ins Bild, der fünfseitige Bereich öffnet sich. Die Situation im zweiten Fall zeigt Abbildung 2c. In diesem Fall ist die Gerade e durch die Unendlichkeit gelaufen. In beiden Fällen sieht man, dass sich einige der dreiseitigen Bereiche nun ebenfalls öffnen und einige der vierseitigen Bereiche schliessen. Man kann in beiden Abbildungen drei im Endlichen geschlossene Vierecksbereiche finden. Egal ob der fünfeckige Bereich im Endlichen geschlossen ist oder nicht, auf jeden Fall berührt jede seiner Seiten die Seite eines dreieckigen Gebietes und jede seiner Ecken grenzt an eine Ecke eines viereckigen Gebietes an. Diese Gegebenheiten bleiben erhalten, wenn sich der zuvor geschlossene Fünfecksbereich öffnet und durch die Unendlichkeit zieht.

Aufschlussreich ist nun das folgende Experiment: Man nimmt ein Blatt und zeichnet darauf in beliebiger Anordnung fünf Geraden. Wenn man darauf achtet, dass alle Schnittpunkte derselben auf dem Blatt zu sehen sind und nicht irgendwo drei Geraden durch einen Punkt laufen, so wird man immer eine der drei gezeigten Anordnungen erhalten. Andere sind gar nicht möglich. Es gibt also immer genau ein fünfseitiges Gebiet, welches man in der Anordnung a, b, c, d, e durchlaufen kann und diese Anordnung ist natürlich vor allen übrigen ausgezeichnet.³ Bereits bei sechs Geraden ist diese Eindeutigkeit nicht mehr gegeben. Man kann sechs Geraden so auf einem Blatt anordnen, dass ein sechsseitiges Gebiet entsteht. Dies ist aber nicht immer der Fall. Mit der Fünfzahl ist also eine besondere Ordnungskraft und Eindeutigkeit verbunden. Vergleichen wir noch die fünfseitigen Hüllen: Je nach Anordnung der Punkte kann die Hülle entweder einen geschlossenen Kern umgeben (Abb. 3a) oder einen solchen, der sich in der oben beschriebenen Weise durch die Unendlichkeit zieht: Abbildung 3b kann man so auffassen, dass eine Ecke des Kerngebietes durch die Unendlichkeit gelaufen ist, in Abbildung 3c ist es eine Seite. Die Hülle ist in jedem Falle so beschaffen, dass sie sich durch die Unendlichkeit erstreckt. Beim Kerngebiet kann dies der Fall sein, muss es aber nicht.

² Ich kann natürlich auch einen der Zacken des Fünfsterns durch die Unendlichkeit laufen lassen. Dabei bleibt das fünfseitige Gebiet als geschlossenes erhalten, ein dreiseitiges Gebiet öffnet sich und ein vierseitiges schliesst sich. Auch in diesem Fall ergibt das fünfseitige Gebiet eine eindeutige Anordnung der Geraden.

³ Eine ausführlichere Darstellung dieser Anordnungseigenschaften findet man bei Locher-Ernst 2016 im Kap. Die einfachsten Figuren des Raumes und der Desargues'sche Satz. Fünfergebilde.

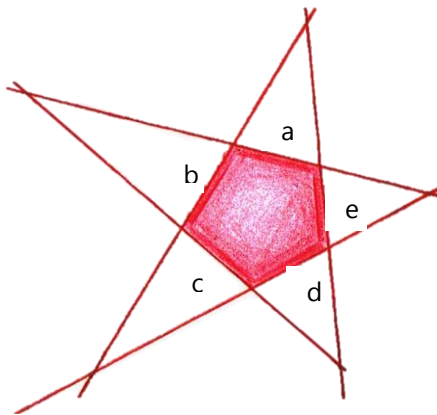


Abbildung 2a

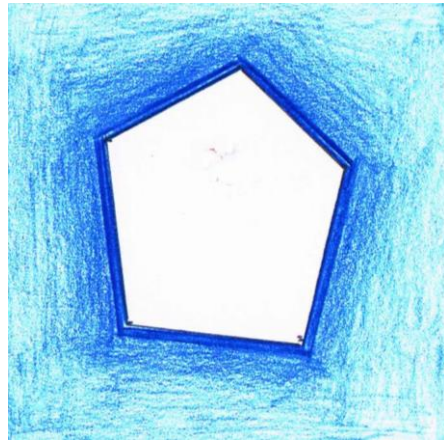


Abbildung 3a

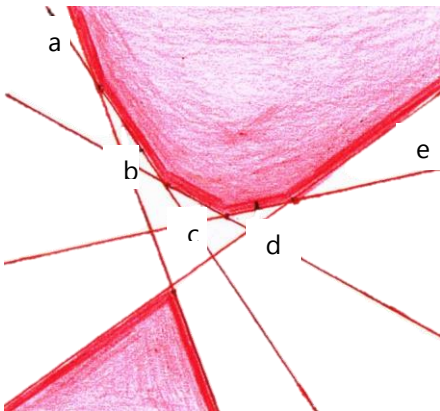


Abbildung 2b

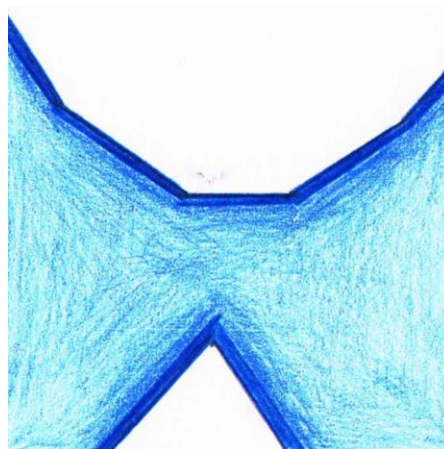


Abbildung 3b

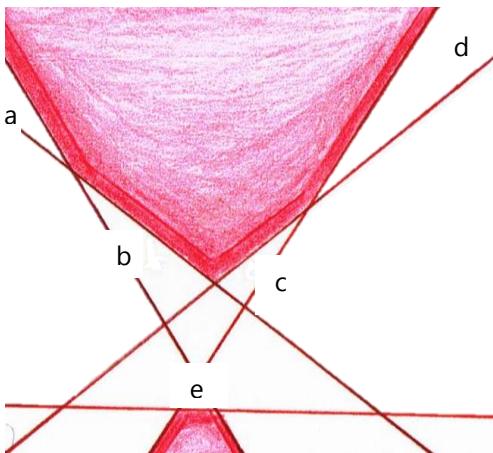


Abbildung 2c

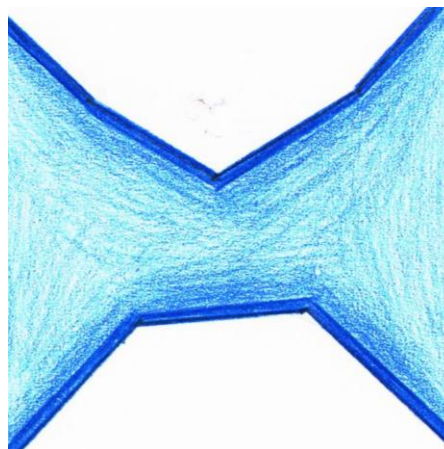


Abbildung 3c

Aufschlussreich ist es auch, die Entstehung der fünfseitigen Kerne und Hüllen zu betrachten: Legt man vier Geraden in eine Ebene (Abb. 4a schwarz) und fügt eine fünfte hinzu (4a rot), so kann man

verfolgen, wie die hinzu gefügte Gerade einige der vorher vorhandenen Gebiete in zwei teilt.⁴ Gleichzeitig entsteht immer ein vorher nicht vorhandenes fünfseitiges Gebiet. In den Abbildungen 4a und 4b ist dies beispielhaft gezeigt: Je eines der geteilten vierseitigen Gebiete ist hervorgehoben, die Teilung ist durch die unterschiedliche Färbung des zuvor zusammenhängenden Gebietes in rot und grün verdeutlicht. Gleichzeitig ist das entstandene fünfseitige Gebiet durch eine dickere grüne Umrandung betont. Die Lage der fünf Geraden ist in beiden Abbildungen die gleiche. In Abbildung 4a sind zwei vierseitige Gebiete entstanden, in Abbildung 4b ein vierseitiges und ein dreiseitiges.

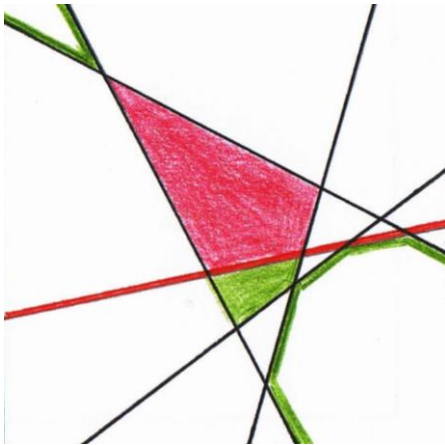


Abbildung 4a

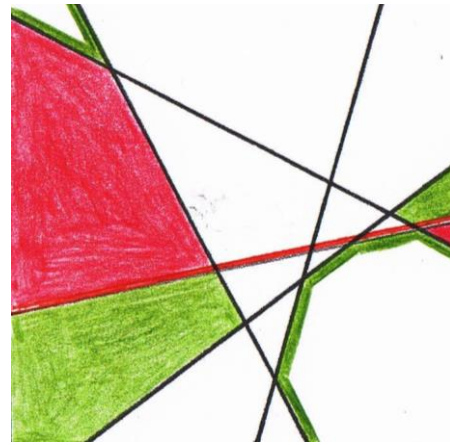


Abbildung 4b

Entsprechendes kann man mit den Hüllen tun. Man setzt vier Punkte in eine Ebene und fügt einen fünften hinzu. Die Abbildungen 5a bis 5d zeigen wiederum Beispiele. Fügt man zu den vier schwarzen Punkten einen fünften hinzu (Abb. 5a rot), so wird die vorher viereckige Hülle in eine fünfeckige (blaue Gerade) und eine dreieckige (gelbe Gerade) unterteilt. In Abbildung 5b sieht man die fünfeckige Hülle in blau, die dreieckige in gelb und den Überlappungsbereich beider in grün. Das grüne Winkelfeld kann sowohl von den blauen als auch von den gelben Geraden überstrichen werden. In den blau gezeichneten Teil können die gelben Geraden nicht hinein, der gelb gezeichnete ist für die blauen Geraden nicht zugänglich. Die beiden neu entstandenen Hüllen sind in ihren gemeinsamen Umrissen mit der vorher vorhandenen vierseitigen identisch. Die Abbildungen 5c und 5d zeigen eine weitere Unterteilungsmöglichkeit. Hier entstehen aus der ursprünglichen vierseitigen Hülle zwei neue ebenfalls vierseitige Hüllen, wovon wiederum die eine gelb, die andere blau gezeichnet ist und der Überlappungsbereich in grün. Möchte man das Gespräch der Formen betonen, das durch das Zusammenspiel der Hüllen entsteht, so kann man noch eine andere Form der Darstellung wählen. Die Abbildungen 5e und 5f zeigen die gleichen Hüllbereiche, die in den vorangehenden Abbildungen auch zu sehen sind, nur sind sie so gezeichnet, dass der Umriss der Form stärker betont ist. Die Aufmerksamkeit richtet sich hier nicht auf die Überlappung, sondern auf die charakteristische Begegnung der beiden Formelemente. Die so entstehenden Formen laden zu vielfältigem Experimentieren ein.

⁴ Man kann die Gerade legen, wie man will, unter der Voraussetzung, dass sich nicht drei Geraden in einem Punkt schneiden, wird sich immer ergeben, dass die hinzugefügte Gerade vier von sieben Gebieten teilt und sich so insgesamt elf Gebiete ergeben.

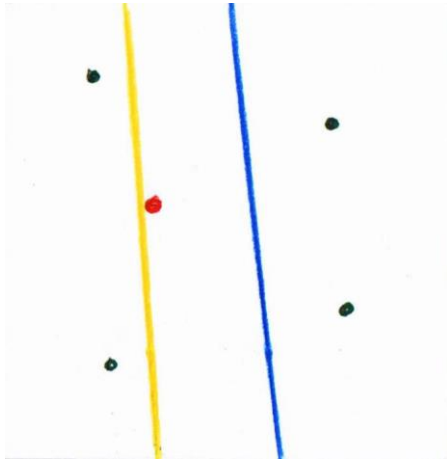


Abbildung 5a

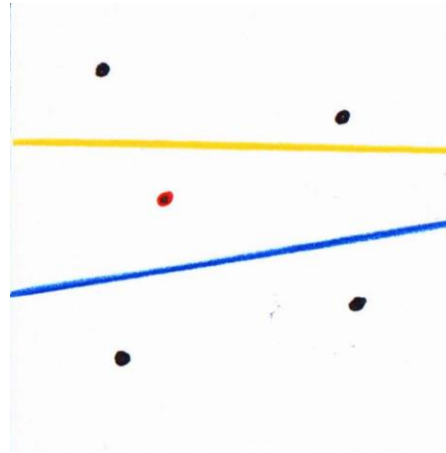


Abbildung 5c

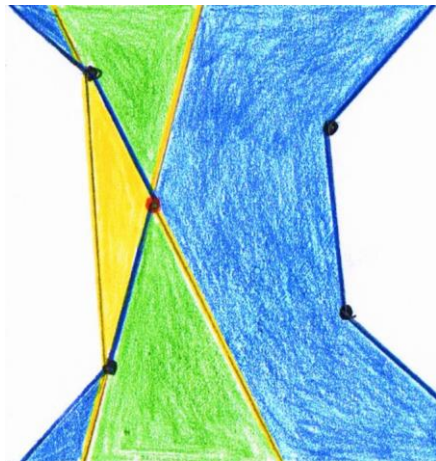


Abbildung 5b

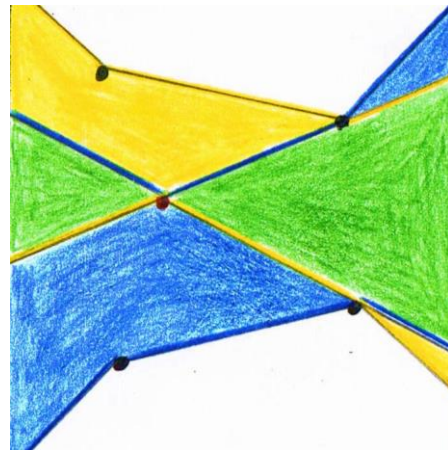


Abbildung 5d

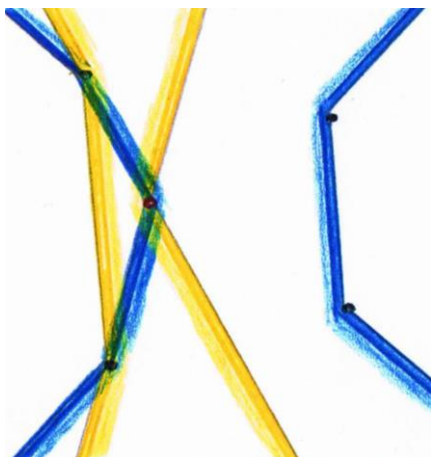


Abbildung 5e

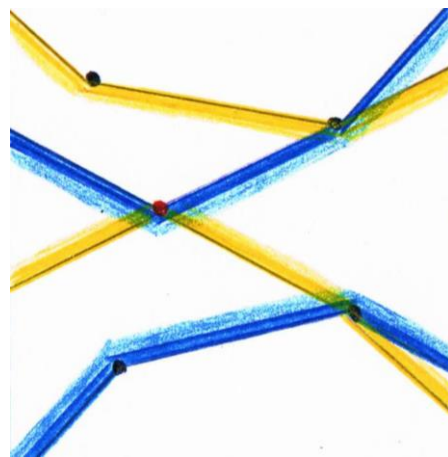


Abbildung 5f

Fünffzahl bei Kegelschnitten

Es gibt eine weitere erstaunliche Eigenschaft, die mit der Fünffzahl verknüpft ist: Legt man fünf Punkte beliebig in eine Ebene, so ist damit eindeutig ein bestimmter Kegelschnitt festgelegt und auch konstruierbar. Dasselbe gilt für fünf Geraden: Man kann diese, wie oben beschrieben, völlig willkürlich in eine Ebene legen, nur dürfen nicht mehr als zwei Geraden durch einen Punkt laufen. Diese fünf Geraden bilden dann immer fünf Tangenten an einen Kegelschnitt. Dieser ist dadurch ebenfalls eindeutig bestimmt und konstruierbar. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, wie man weitere Punkte oder Geraden, die zu demselben Kegelschnitt gehören, finden kann. Denn wenn man sechs Punkte willkürlich in eine Ebene legt, so befinden sich diese mit grosser Wahrscheinlichkeit nicht auf demselben Kegelschnitt. Dasselbe gilt für sechs beliebig in eine Ebene gelegte Geraden: diese sind mit ziemlicher Sicherheit nicht alle Tangenten an denselben Kegelschnitt. Um weitere solche Punkte und Geraden zu finden, nehmen wir die Sätze von Pascal und Brianchon zu Hilfe. Aus diesen ergibt sich eine relativ einfache Methode der Konstruktion.

Wir gehen zunächst von fünf auf einem Kreis liegenden Punkten aus. Diese kann man irgendwie nummerieren und in der nummerierten Abfolge verbinden. Man erhält ein dem Kreis eingeschriebenes Fünfeck. Nun legt man durch den Punkt eins willkürlich eine weitere Gerade. Natürlich sieht man deren Schnittpunkt mit dem Kreis sogleich. Mit der geschilderten Konstruktion findet man diesen Punkt aber auch dann, wenn der Kreis (oder sonstige Kegelschnitt) nicht gezeichnet ist. Die Gerade kann irgendwie liegen, nur soll sie nicht die Tangente in dem Punkt sein. Dann wird sie auf jeden Fall einen weiteren Schnittpunkt mit dem Kreis haben. Der neue Punkt wird die Nummer sechs erhalten. Nun suchen wir nach der dazu gehörigen Pascal Gerade. Man findet diese ja dadurch, dass man in einem auf einem Kegelschnitt liegenden Sechseck gegenüberliegende Seiten verbindet. Nun haben wir das Sechseck noch nicht, uns fehlt ja noch der sechste Punkt. Diesen können wir aber mit Hilfe der Pascal Gerade in folgender Weise finden: Wir verbinden zunächst die Seiten 12 und 45, bis sie sich schneiden. Der Schnittpunkt ist in der Abbildung 6a mit I bezeichnet. Obwohl ich den Punkt sechs noch nicht habe, ist ja die Seite 61 gegeben; es ist ja eben die von mir willkürlich gewählte Gerade durch Punkt eins. Folglich kann ich die Seiten 34 und 61 ebenfalls verlängern, bis sie sich schneiden (Punkt II). Die Verbindung der beiden so erzeugten Punkte ergibt die Pascal Gerade. Nun fehlt uns noch der dritte Punkt auf dieser. Wir finden ihn entweder, indem wir die Gerade 23 verlängern, bis sie die Pascal Gerade schneidet oder – dies ist in Abbildung 6a der Fall – der Schnittpunkt der Geraden 23 mit der Pascal Gerade ist direkt vorhanden. Nun ziehe ich vom Punkt 5 ausgehend eine Gerade durch diesen Schnittpunkt. Dort, wo diese die Gerade 61 schneidet, liegt der Punkt sechs. Der Einfachheit halber wurde diese Konstruktion zunächst am Kreis erklärt, sie ist mit allen Kegelschnitten in gleicher Weise möglich. Die Abbildungen 6b und 6c zeigen dieselbe Konstruktion an der Ellipse, bzw. an der Hyperbel. Natürlich kann man auf diese Weise beliebig viele weitere Punkte finden. Um dies zu tun, kann man entweder die Gerade um Punkt eins drehen oder die Reihenfolge der Nummern der Ecken ändern. Wandert der Punkt sechs auf dem Kegelschnitt, so dreht sich die Pascal Gerade um Punkt I.⁵

Betrachten wir nun die duale Konstruktion: In Abbildung 7a ist ein Fünfeck einem Kreis umschrieben. Nun werden die Seiten nummeriert und auf einer der Seiten (am einfachsten geht es, wenn man wiederum die Seite eins nimmt) wird willkürlich ein Punkt gewählt. Durch diesen

⁵ Es ist nicht zwingend notwendig, dass die willkürlich gewählte Gerade durch den Punkt eins gelegt werden muss. Sie kann durch jeden der fünf Punkte gehen. Nur muss man bei der Nummerierung berücksichtigen, dass der neu zu findende Punkt und der, durch den die Gerade gelegt wird, zwei aufeinander folgende Nummern erhalten, da diese beiden Punkte schliesslich durch eine Seite des Sechsecks verbunden werden.

Punkt soll eine Tangente an den Kreis gelegt werden. Zur Konstruktion derselben nehmen wir den Satz des Brianchon zu Hilfe. Dieser besagt ja, dass ein einem Kegelschnitt umschriebenes Sechseck eine besondere Eigenschaft hat: Verbindet man gegenüberliegende Ecken desselben, so schneiden sich die drei entstehenden Verbindungs-geraden in einem Punkt. Als erstes zieht man die Verbindungsgerade zwischen Ecke 12 und Ecke 45. Durch den willkürlich gewählten Punkt ist die Ecke 61 festgelegt. Diese kann man mit der Ecke 34 verbinden. Die beiden Verbindungs-geraden schneiden sich in einem Punkt. Nun legt man eine dritte Gerade durch die Ecke 23 und diesen Schnittpunkt und verlängert sie, bis sie die Seite fünf trifft. Damit ist die Ecke 56 konstruiert. Die Verbindungsgerade zwischen den Ecken 56 und 61 ist eine Tangente an den Kreis. Wandert diese Tangente auf dem Kreis, so bewegt sich der Brianchon Punkt auf der Geraden, die die Ecken 12 und 45 verbindet, hin und her. Auch an dieser Stelle zeigt sich die Dualität der beiden Konstruktionen: Während sich hier ein Punkt auf einer Geraden bewegt, hatte sich zuvor die Pascal Gerade um einen fixen Punkt gedreht. Auch diese Konstruktion lässt sich mit allen Kegelschnitten ausführen. Die Abbildungen 7b und 7c zeigen Beispiele an der Ellipse und an der Hyperbel. Möchte man mehrere Tangenten konstruieren, so kann man sowohl verschiedene Punkte auf der Seite eins wählen als auch die Reihenfolge der Nummern abändern. Grundsätzlich lassen sich mit den gezeigten Konstruktionen sowohl beliebig viele Punkte als auch beliebig viele Tangenten eines Kegelschnittes finden. Möchte man diese aber in einer Zeichnung haben, d. h. also möchte man ausgehend von fünf Punkten, bzw. von fünf Geraden einen Kegelschnitt schrittweise sichtbar auf dem Blatt entstehen lassen, so wird die Zeichnung bald unübersichtlich, da für jeden Punkt eine neue Pascal Gerade konstruiert werden muss und für jede Tangente ein eigener Brianchon Punkt. Im Folgenden werden wir eine weitere Konstruktionsmethode kennenlernen, die für diesen Zweck geeigneter ist. Bevor diese Konstruktion gezeigt werden kann, müssen wir jedoch ein Grundgesetz der projektiven Geometrie, dasjenige der Projektivität betrachten.

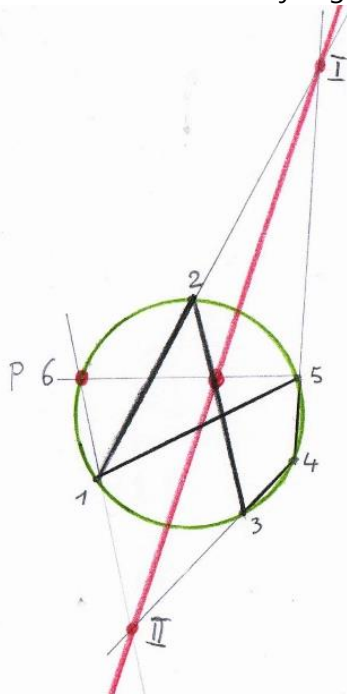


Abbildung 6a

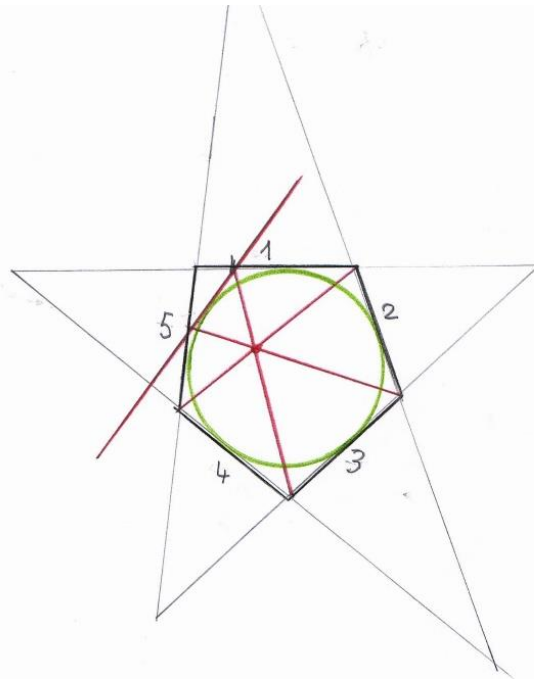


Abbildung 7a

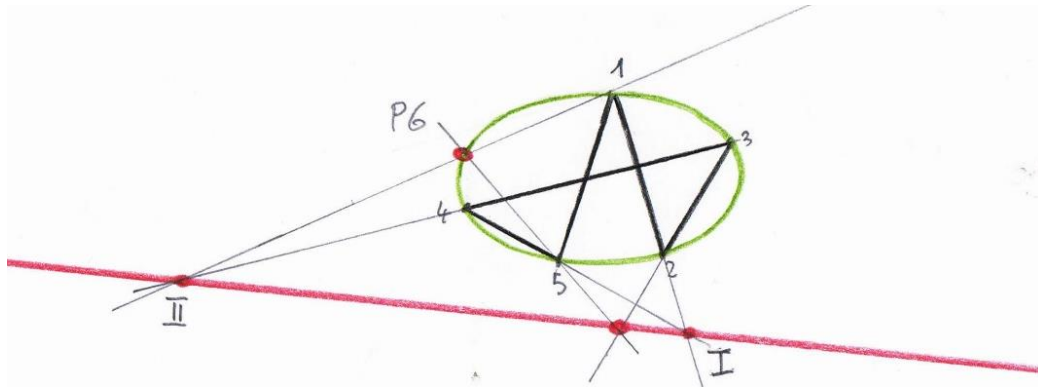


Abbildung 6b

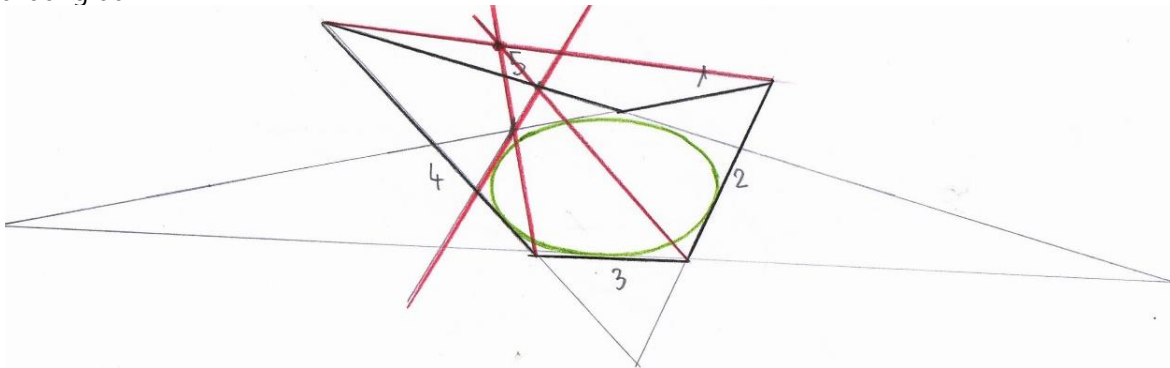


Abbildung 7b

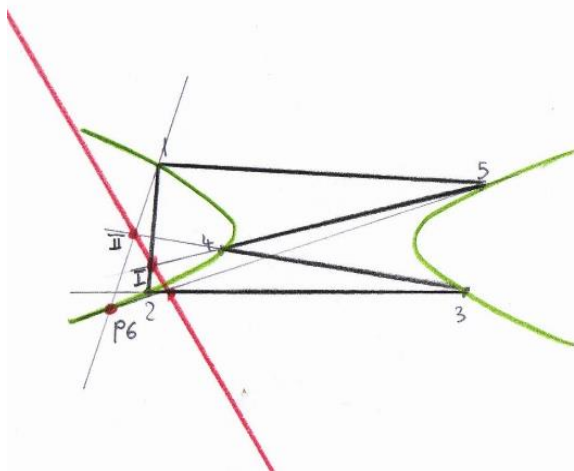


Abbildung 6c

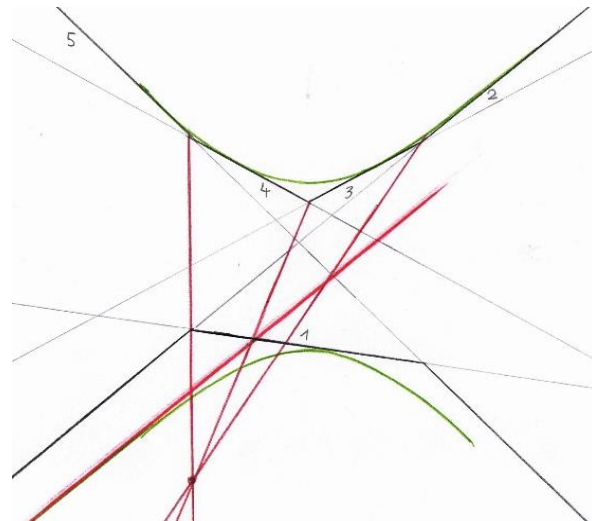


Abbildung 7c

Perspektivität und Projektivität

Die projektive Geometrie hat einen deutlichen Bezug zum Sehraum und damit zu den Gesetzmässigkeiten der Perspektive. Projiziert man ein Dia auf eine Leinwand, so wird die Abbildung vergrössert. Will man dabei Verzerrungen vermeiden, so muss man darauf achten, dass die Leinwand möglichst parallel zum Dia steht. Grundsätzlich kann man mit Hilfe einer Lichtquelle eine Figur von einer Ebene auf die andere projizieren, auch wenn die Ebenen nicht parallel sind. So ist z. B. der Schattenwurf eines Baumes eine Projektion von einem überwiegend senkrecht ausgerichteten Gebilde in eine mehr oder weniger waagrechte Ebene. Abbildung 8 zeigt die Projektion eines in einer senkrechten Ebene stehenden Fünfecks in eine waagrecht liegende. Dort

wo die roten Projektionsstrahlen zusammenlaufen, kann man sich eine Lichtquelle denken. Diese kann natürlich in alle Richtungen leuchten, von Interesse für uns sind diejenigen Lichtstrahlen, die die Ecken des aus der senkrechten Ebene ausgeschnittenen Fünfecks treffen. Dieselben Strahlen treffen die waagrechte Ebene in bestimmten Punkten und projizieren so das Fünfeck aus der senkrechten in die waagrechte Position. Um die Konstruktion ausführen zu können, benötigt man benötigt man die Senkrechten, die von den Ecken des Fünfecks die Schnittgerade der beiden Ebenen treffen (Fusspunkte). Von der Lichtquelle aus zieht man eine weitere Senkrechte auf die untere Ebene. Von diesem Punkt aus schickt man Strahlen durch die Fusspunkte und verlängert diese. Die Schnittpunkte der Projektionsstrahlen mit diesen ergeben die Ecken des waagrecht liegenden Fünfecks.⁶ Schaut man nur auf die roten Projektionsstrahlen, so kann man diese auch als einen Ausschnitt aus einem Strahlenbündel auffassen. Jeder der Strahlen geht durch je eine Ecke des ursprünglichen und des abgebildeten Fünfecks.

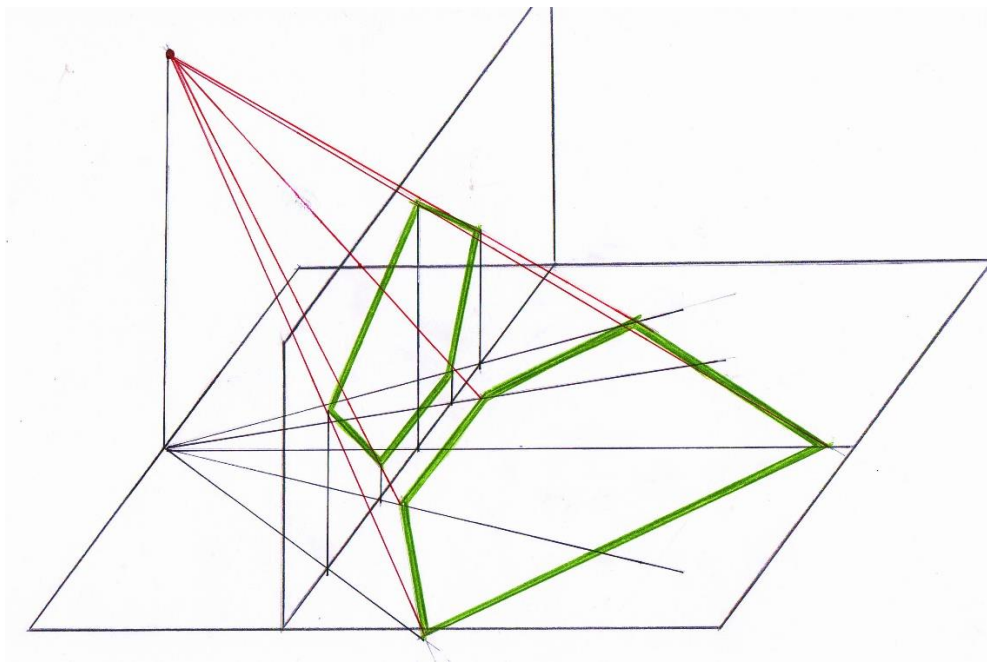


Abbildung 8

Es ist deutlich, dass es sich hier um eine Abbildung handelt, die den Gesetzen der Perspektive entspricht. Mit anderen Worten: Schneidet man Strahlen eines Strahlenbündels mit zwei beliebigen Ebenen, so sind die durch die Schnitte entstehenden Figuren perspektivisch zueinander. Entsprechendes gilt in der Ebene: Schneidet man Strahlen eines Strahlenbüschels mit zwei beliebigen Geraden, so sind die entstehenden Punktreihen perspektivisch, oder man sagt auch perspektiv, zueinander. Die Abbildungen 9a und 9b zeigen zwei Beispiele. Es kommt hierbei nicht darauf an, ob die Schnittgeraden beide auf einer Seite des Büschelpunktes liegen oder auf zwei verschiedenen. In dem Moment, wo man den Durchgang durch die Unendlichkeit zulässt, hat man in beiden Situationen zwei Möglichkeiten, um z. B. vom Punkt A zum Punkt A' zu gelangen: Entweder wählt man den „direkten“ Weg oder denjenigen, der durch die Unendlichkeit läuft. Der Unterschied ist lediglich, dass in Abbildung 9a der Weg über die Unendlichkeit gleichzeitig durch den Büschelpunkt führt, während in Abbildung 9b der direkte Weg durch den Büschelpunkt führt

⁶ Eine Fülle von Anregungen zum Ausführen solcher Projektionen findet man bei Bernhard 1984

und der durch die Unendlichkeit verlaufende nicht. Nimmt man dagegen die Punkte einer Punktreihe in zwei verschiedene Strahlenbüschel auf, so erhält man die duale Konstruktion. Hier sind die beiden Strahlenbüschel perspektiv zueinander (Abbildungen 10a und 10b). Wiederum spielt es keine Rolle, ob die beiden Büschelpunkte auf der gleichen Seite der Punktreihe liegen oder nicht. Die Perspektivität ist die direkteste Möglichkeit, Punkte einer Punktreihe eindeutig und umkehrbar den Punkten einer anderen Punktreihe zuzuordnen. Dasselbe gilt für die Zuordnung der Strahlen eines Büschels zu denen eines anderen Büschels.

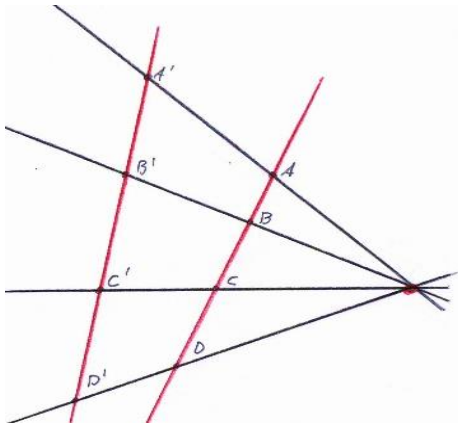


Abbildung 9a

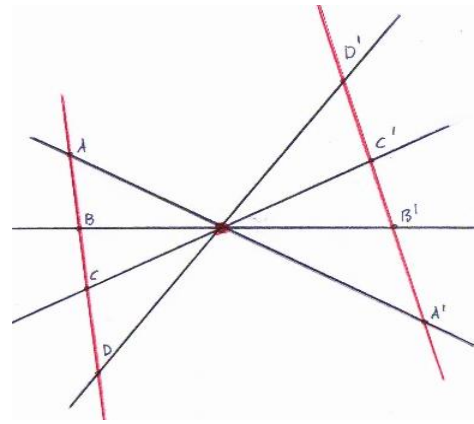


Abbildung 9b

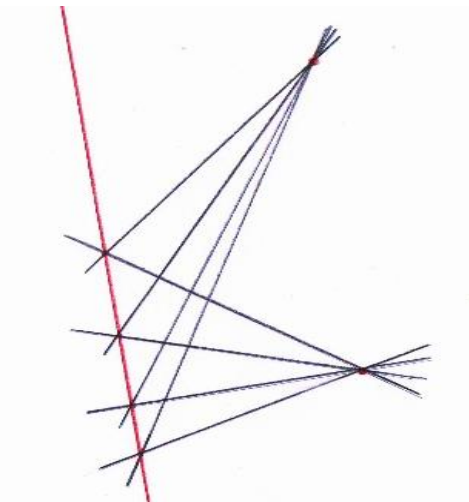


Abbildung 10a

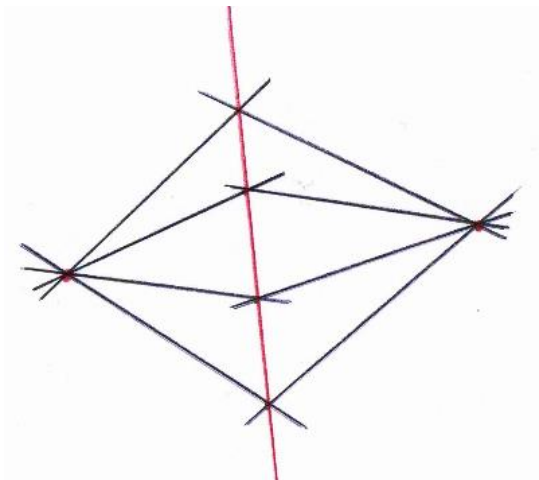


Abbildung 10b

Man kann natürlich auch mehrere Perspektivitäten hintereinander ausführen. In Abbildung 11a ist die Reihe der Punkte A, B, C und D links aussen perspektiv zu den Schnittpunkten auf der mittleren roten Gerade. Diese nicht bezeichneten Schnittpunkte werden in einen weiteren Büschelpunkt aufgenommen und nochmals von einer Gerade geschnitten. Es ergeben sich die Punkte A', B', C' und D'. Diese sind zu den ursprünglichen Punkten A, B, C und D nicht mehr perspektiv, sind aber dennoch mit ihnen verwandt. Sie liegen nicht beliebig, denn auch hier ist z. B. der Punkt A eindeutig dem Punkt A' zugeordnet und umgekehrt. Ich könnte auf meiner Ausgangsgeraden beliebige weitere Punkte wählen und sie über die mittlere auf die rechte Gerade projizieren. Ich erhalte auf jeden Fall ein eindeutiges Ergebnis. Entsprechendes gilt für die Strahlenbüschel in Abbildung 11b. Die Strahlen a, b, c und d des Punktes links sind den Strahlen a', b', c' und d' des

Punktes rechts zugeordnet. Die hier vorliegende Gesetzmässigkeit ist diejenige der Projektivität. Im Gegensatz zur Perspektivität ist die Zuordnung von Punkten einer Punktreihe zu denjenigen einer zweiten Punktreihe oder Geraden eines Strahlenbüschels zu denjenigen eines zweiten Büschels hier indirekt, durch eine weitere eingefügte Perspektivität vermittelt. Diese indirekte, vermittelte Zuordnung ermöglicht, wie wir sehen werden, das Entstehen gebogener Flächen, nämlich der Kegelschnitte, rein aus dem Zusammenspiel von Geraden und Punkten. Insofern hier neue Gestaltungsmöglichkeiten von Formen auftreten, kann man auch sagen, dass die durch die Projektivität vermittelte Beziehung mächtiger ist und damit der Perspektivität übergeordnet ist.

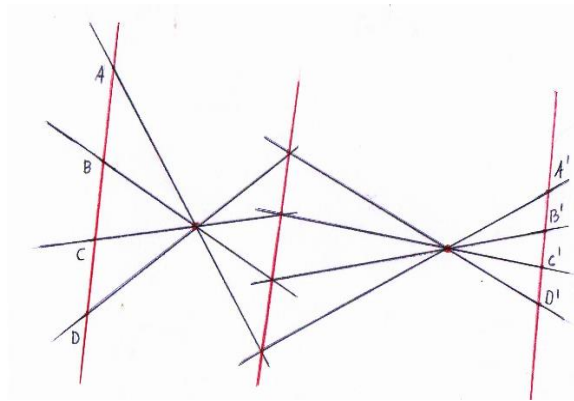


Abbildung 11a

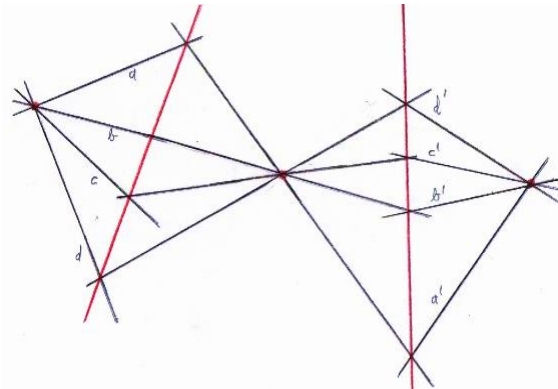


Abbildung 11b

Wie viele Elemente braucht man nun, um eine Projektivität festzulegen? Anders gefragt: Möchte man die Punkte, die auf zwei Punktreihen liegen, zueinander in ein eindeutiges Verhältnis setzen, wie viele Punkte darf man auf jeder Punktreihe willkürlich auswählen und aufeinander beziehen, um die Zuordnung aller Punkte zueinander zu bestimmen. Würde man auf zwei beliebig gewählten Geraden willkürlich vier oder mehr Punkte wählen, würden diese nicht in einem projektiven Verhältnis zueinanderstehen. Nun ergibt sich der eigentümliche und erstaunliche Sachverhalt, dass sich drei willkürlich gewählte Punkte einer Punktreihe oder drei Geraden eines Strahlenbüschels zu drei weiteren in jedem Fall projektiv verhalten. Man kann dies in folgender Weise zeigen:

Man wählt beliebig zwei Geraden in einer Ebene⁷ und legt auf jeder Geraden willkürlich drei Punkte fest. In der Abbildung 12a sind die Punkte auf der ersten Gerade mit A, B und C bezeichnet, auf der zweiten Gerade mit A', C' und B'. Die hier gewählte Anordnung ist zeichnerisch praktisch, möglich ist prinzipiell auch jede andere. Wenn die gewählten Punkte zueinander projektiv sind, so muss sich die vermittelnde Perspektivität finden lassen. Dies kann man in folgender Weise machen: durch die beiden Punkte A und A' legt man eine Gerade und wählt auf dieser, wiederum willkürlich zwei Punkte S und S'. Nun verbindet man S mit B und S' mit B' und verlängert die beiden Geraden, bis sie sich schneiden. Man verbindet ebenfalls S mit C und S' mit C' und ermittelt wiederum den Schnittpunkt. Die beiden so gefundenen Schnittpunkte verbindet man mit einer Geraden (rot). Nun kann man direkt sehen, dass man vom Punkt S aus den Punkt B auf die rote Gerade projiziert hat und diesen Punkt vom Punkt S' aus dem Punkt B' zuordnet. Dasselbe gilt für die Punkte C und C'. Der Schnittpunkt der roten Geraden mit der blauen, die die Punkte A und A' verbindet, ist nicht mehr auf dem Blatt, er wäre ziemlich weit unten links. Jedenfalls ist es möglich,

⁷ Mit Geraden, die nicht in einer Ebene liegen, also windschief sind, geht es auch, nur ist die Konstruktion etwas komplizierter.

jeden der Punkte A, B und C von S aus auf die rote Gerade zu projizieren und von dort aus durch S' in die Punkte A', C' und B' übergehen zu lassen. Die entsprechenden Punkte auf der roten Gerade sind also sowohl zu A, B und C als auch zu A', C' und B' perspektiv. Wir haben also unser gesuchtes Element gefunden. Nun kann man beliebig weitere Punkte auf einer der beiden Geraden wählen und auf die andere projizieren. In der Zeichnung 12a ist dies für die Punkte X und Y ausgeführt. Jede so durchgeführte Projektion führt zu einem eindeutigen Ergebnis. Es ist deutlich, dass die Wahl der roten Geraden von der Wahl der beiden Punkte S und S' abhängig ist. Diese hatten wir willkürlich irgendwo auf die Verbindungsgerade von A und A' gesetzt. Wählt man eine andere Lage dieser Punkte, so verschiebt sich dadurch die rote Gerade. In Abbildung 12b ist ein weiteres Beispiel gezeichnet. Erstaunlich ist nun, dass unabhängig von der Lage der beiden Punkte S und S' (sie müssen lediglich auf der genannten Verbindungsgerade liegen) und damit auch unabhängig von der Lage der roten Gerade jedem Punkt X durch diese Konstruktion derselbe Punkt X' zugeordnet wird. Man sieht es hier für die beiden Punkte X und Y. Sie sind in den beiden Abbildungen 12a und 12b an der gleichen Stelle zwischen B und C gesetzt und werden durch beide Konstruktionen an die gleiche Stelle zwischen B' und C' projiziert.

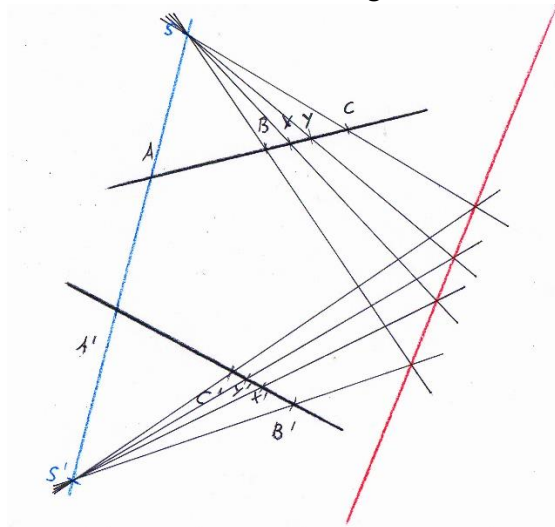


Abbildung 12a

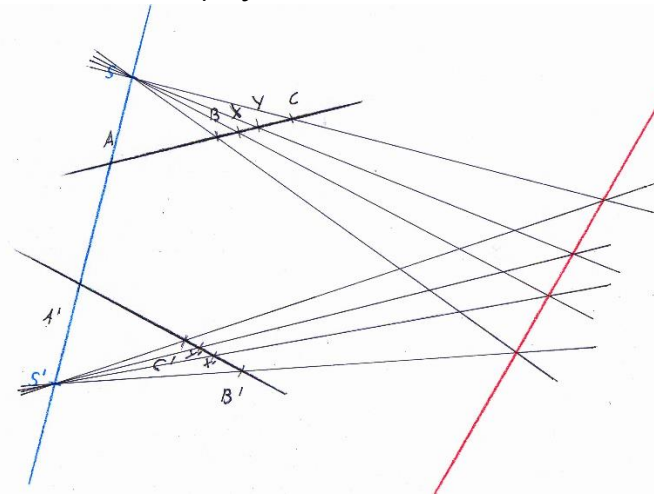


Abbildung 12b

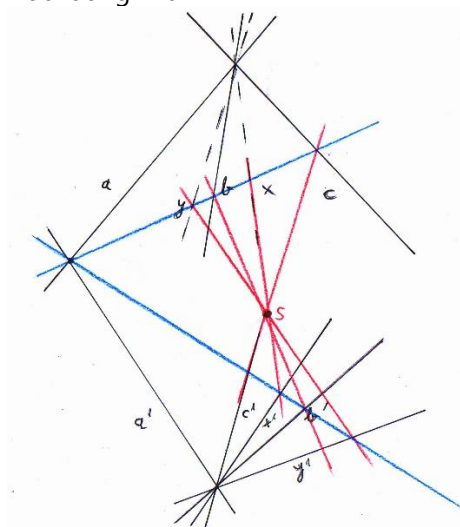


Abbildung 13a

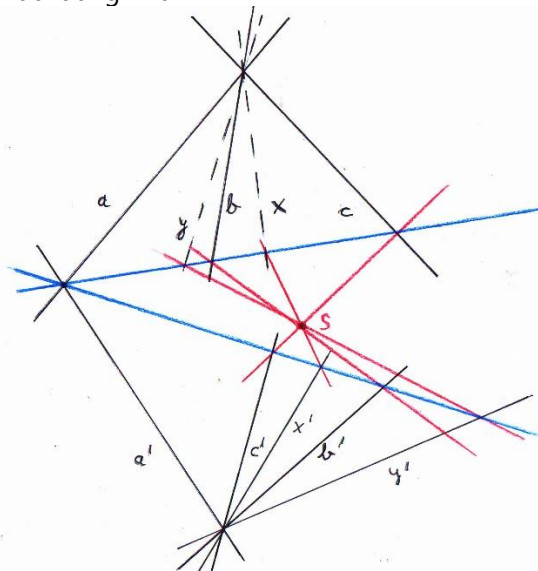


Abbildung 13b

Man kann damit experimentieren, dass man die Punkte S und S' noch weiter verschiebt als es hier geschehen ist, man wird feststellen, dass die Projektion der Punkte S und S' abermals zum selben Ergebnis führt. Durch die Wahl von zweimal drei Punkten auf zwei Geraden ist also tatsächlich jeder Punkt der einen Geraden einem Punkt der anderen Geraden eindeutig zugeordnet. Man nennt diesen Sachverhalt auch den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie.⁸ Er gilt nicht nur für Punkte auf einer Geraden, er ist umfassender und gilt z. B. auch für Geraden durch einen Punkt. Setzt man beliebig zwei Punkte, die man als Träger von Strahlenbüscheln denkt und wählt durch jeden Punkt willkürlich drei Strahlen, so ist damit ebenfalls eine eindeutige Beziehung von jedem Strahl des ersten Büschels zu jedem Strahl des zweiten Büschels und umgekehrt festgelegt. Die Konstruktion, mit der man das zeigen kann ist dual zu der oben ausgeführten.

Durch zwei willkürlich gewählte Punkte legt man je drei Strahlen a, b und c sowie a', c' und b' . Die beiden Strahlen a und a' verlängert man, bis sie sich schneiden. Durch den Schnittpunkt von a und a' werden nun zwei Geraden gelegt s und s' , sodass s die beiden Strahlen b und c schneidet und s' die Strahlen c' und b' . Die Schnittpunkte bs und $b's'$ verbindet man, ebenso die Schnittpunkte cs und $c's'$. Die beiden Verbindungsgeraden schneiden sich im Punkt S . Mittels dieses Punktes S kann man jeden beliebigen Schnittpunkt eines Büschelstrahles mit s eindeutig einem Schnittpunkt des zweiten Büschelstrahles mit s' zuordnen. Somit ist also eine eindeutige Beziehung hergestellt zwischen den Strahlen des ersten Büschels und denjenigen des zweiten Büschels. Wiederum kann ich für die beiden Geraden s und s' eine andere Lage wählen. Dadurch verändert sich auch die Lage des Punktes S . Unabhängig davon wird aber jedem Strahl des ersten Büschels derselbe Strahl des zweiten Büschels zugeordnet. In den Abbildungen 13a und 13b findet man zwei Beispiele. Die Projektion ist ausgeführt für die beiden Strahlen y und x und man sieht, dass ihnen, unabhängig von der Lage des Punktes S dieselben Geraden x' und y' entsprechen. Weiteres Experimentieren mit der Lage von S, s und s' würde zum selben Ergebnis führen.

Will man also Punkte einer Punktreihe solchen einer anderen Punktreihe projektiv zuordnen, so nimmt man die Punkte der ersten Punktreihe in ein Strahlenbüschel auf und projiziert sie auf eine zweite Punktreihe. Die sich ergebenden Schnittpunkte nimmt man in ein weiteres Strahlenbüschel auf, dessen Strahlen man abermals mit einer Punktreihe schneidet. Um diese Art der Projektivität handhaben zu können, benötigt man also zwei Punkte und drei Geraden. Will man Strahlen eines Büschels projektiv den Strahlen eines weiteren Büschels zuordnen, so benötigt man dazu umgekehrt drei Punkte und zwei Geraden. Die Strahlen der beiden Büschel werden mit je einer Geraden geschnitten und die sich so ergebenden Schnittpunkte mittels eines weiteren Punktes aufeinander bezogen.

Die Erzeugung von Kegelschnitten

Die beiden beschriebenen Konstruktionen sind grundlegend für die Erzeugung von Kegelschnitten. Es ergibt sich nämlich folgender Zusammenhang: Verbindet man je zwei einander zugeordnete Punkte von zwei Punktreihen miteinander, so ordnen sich die dadurch entstehenden Geraden zu einer Kegelschnittshülle an. Verlängert man einander zugeordnete Strahlen von zwei Strahlenbüscheln, bis sie sich schneiden, so liegen die Schnittpunkte auf einem Kegelschnitt. Es ergibt sich der erstaunliche Sachverhalt, dass zweimal drei willkürlich auf zwei Punktreihen gesetzte Punkte, bzw. zweimal drei willkürlich aus zwei Büschelpunkten gewählte Strahlen jeweils einen Kegelschnitt festlegen. In die Ausgangssituation braucht man keinerlei Harmonie hinein-zulegen und doch ergeben sich, wenn man die Konstruktion weiterführt, gesetzmässig geordnete

⁸ Vgl. z. B. Locher-Ernst 2016, Kap. Der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie

Verhältnisse. Besonders überschaubar werden die Konstruktionen, wenn man sie mit einem Fünfstern verbindet.⁹ In Abbildung 14a sieht man einen Fünfstern, der dadurch zustande gekommen ist, dass fünf Punkte auf dem Blatt verteilt wurden und so miteinander verbunden wurden, dass jeweils ein Punkt übersprungen wurde. Es ergibt sich ein diesem Fall geschlossener fünfseitiger Bereich, der von fünf dreieckigen Spitzen umgeben ist. Wir werden sehen, inwiefern mit einem solchen Gebilde zwei Kegelschnitte verbunden sind, einer, der sich an das fünfseitige Gebiet tangential anschmiegt und ein weiterer, der durch die fünf Punkte, die die Spitzen bilden, bestimmt ist. Ein Fünfstern oder, anders gesagt, fünf Geraden in einer Ebene legen also einen Kegelschnitt und eine Kegelschnittshülle fest, wenn man die Tangenten an einen Kegelschnitt als Hülle bezeichnen möchte.¹⁰

Betrachten wir den Fünfstern, so können wir die beiden Geraden g und g' als Punktreihen auffassen, deren Punkte einander projektiv zugeordnet werden sollen. Der Fünfstern legt drei Punkte auf der Geraden g fest, nämlich a , b und c und ebenso drei Punkte auf der Geraden g' , nämlich a' , c' und b' . Wir haben genau die zuvor betrachtete Situation, dass auf zwei Geraden jeweils drei Punkte bestimmt und einander zugeordnet worden sind. Damit ist unsere Projektivität

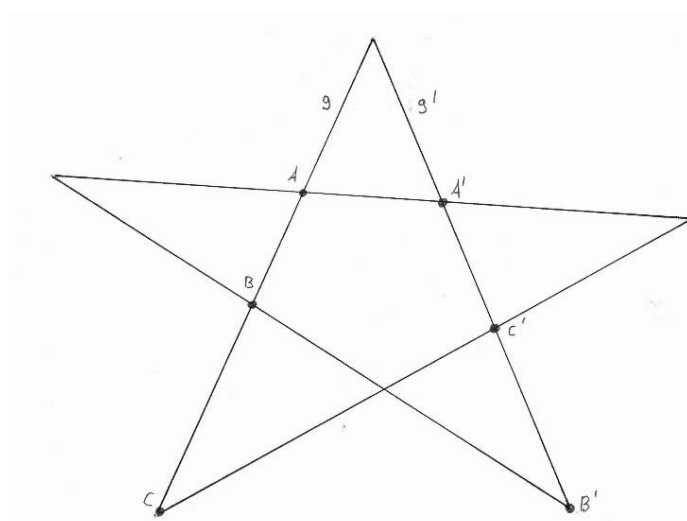


Abbildung 14a

festgelegt und wir können sie nun konstruieren. Abbildung 14b verdeutlicht, wie das geht. Wir wählen zunächst die beiden Spitzen, in die die Seite, auf der die Punkte a und a' liegen, mündet als Büschelpunkte. Von dort aus schicken wir Strahlen zunächst auf die Seite g und von dort aus weiter auf eine Hilfsgerade, die die Punkte C und B' verbindet. Die sich auf dieser Hilfsgeraden ergebenden Schnittpunkte nimmt man in den zweiten Büschelpunkt auf. Die so entstehenden Geraden schneiden notwendig die Gerade g' . Die zwei Geraden, die sich im gleichen Schnittpunkt auf der Geraden

CB' begegnen, sind einander zugeordnet. Die beiden Schnittpunkte, die diese auf der Geraden g bzw. g' erzeugen, verbindet man mittels einer Geraden. Man sieht, dass diese Geraden eine Biegung, die Teil eines Kegelschnittes ist, tangential einhüllen. In Abbildung 14b ist der Prozess lediglich für einen Teil der beiden Geraden g und g' durchgeführt. Man kann grundsätzlich von den gewählten Projektionspunkten aus auf die gesamte Gerade g projizieren und erhält so auch auf der gesamten Geraden g' die zugeordneten Punkte. Aufgrund der grossen Abstände, die sich dabei ergeben, ist dies zeichnerisch teilweise schwierig auszuführen. Möchte man den gesamten Kegelschnitt konstruieren, so bietet sich eine Vereinfachung an. Man kann nämlich die Projektionspunkte wechseln und das bietet den Vorteil, dass die ganze Konstruktion bequem auf einem A4 Blatt Platz hat. Je zwei Punkte, die in den Zacken des Sternes liegen und von einer Geraden verbunden werden, kann man wählen. Es ergeben sich so fünf verschiedene Möglichkeiten. Man

⁹ Vgl. Bernhard 1984, Kap. 24: Ellipse, Parabel und Hyperbel im Fünfstern

¹⁰ Auf den Sachverhalt, dass fünf Punkte oder fünf Geraden in einer Ebene einen Kegelschnitt festlegen, haben wir bereits Bezug genommen, allerdings noch ohne nähere Erläuterung.

zeichnet jeweils die entsprechende Hilfsgerade und bildet so einen Teil des Bogens. Die entsprechenden Bogenteile fügen sich zu einer Gesamtfigur zusammen.

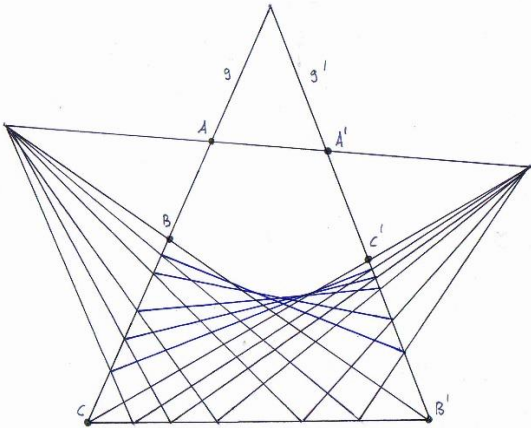


Abbildung 14b

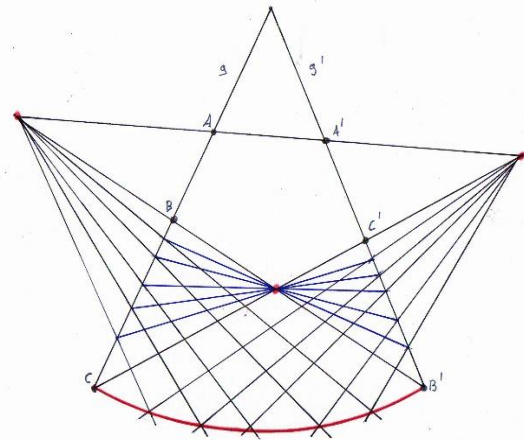


Abbildung 14c

Die dazu duale oder polare Konstruktion liefert Punkte statt Tangenten. Alle diese Punkte liegen wiederum auf einem Kegelschnitt. Abbildung 14c zeigt die Vorgehensweise: Man wählt wiederum die beiden Spitzen, die auf der Geraden durch A und A' liegen, zu Projektionspunkten. Vom ersten Punkt aus schickt man Strahlen auf die Gerade g. Die sich ergebenden Schnittpunkte nimmt man nun in einen Büschelpunkt auf, nämlich die Ecke des fünfseitigen Gebietes, die weder auf g noch auf g' liegt. Von diesem Büschelpunkt aus führt man die Strahlen weiter bis zur Gerade g'. Durch diese durch den Büschelpunkt laufende Gerade sind also jeweils zwei Punkte auf den Geraden g und g' einander zugeordnet. Die beiden Strahlen, die diese Punkte treffen, sind projektiv zueinander. Man verlängert sie, bis sie sich schneiden. Der Schnittpunkt ist ein Punkt des Kegelschnittes. Wiederum kann man sich die Konstruktion erleichtern, indem man die Projektionspunkte wechselt. Man wird unschwer die zuvor beschriebenen Grundkonstruktionen wiedererkennen. Wir haben als Elemente, mit denen wir arbeiten, wie oben beschrieben, entweder zwei Punkte und drei Geraden oder umgekehrt drei Punkte und zwei Geraden. Der Fünfstern bietet durch die Anordnung seiner Geraden und Schnittpunkte den Vorteil, dass das die Projektivität vermittelnde perspektive Element (Gerade oder Punkt) nicht erst konstruiert werden muss, sondern bereits gegeben ist.

Die nachfolgenden Beispiele zeigen auf, dass die entsprechenden Konstruktionen auch dann möglich sind, wenn der fünfeckige Bereich nicht im Endlichen geschlossen ist, sondern in die Unendlichkeit hinein oder durch sie hindurch geht. Es ergeben sich dann Parabeln oder Hyperbeln. Möchte man diese Konstruktionen selbst erüben, so empfiehlt es sich, zunächst von einem geschlossen Fünfstern auszugehen. Die damit verbundenen Ellipsen sind relativ einfach auszuführen. Öffnet man den Fünfstern, indem man eine Zacke oder eine Seite durch die Unendlichkeit führt, so ändert das zwar am Prinzip der Konstruktion nichts, aber es ist zunächst etwas weniger einfach zu überschauen, von wo nach wo man sich bewegen muss.

Hat man sich mit der Konstruktion ein wenig auseinandergesetzt, so sieht man, dass sich viele Variationsmöglichkeiten ergeben.

Abbildung 15a zeigt eine Ellipse, die um einen Fünfstern herum konstruiert wurde. Der Übersicht halber sind die Projektionsstrahlen nicht völlig ausgezogen, sondern es wurden jeweils nur die Schnittpunkte markiert. Abbildung 15b zeigt einen Kreis. Hier war die Konstruktion ohne Wechsel der Projektionspunkte möglich. Das führt dazu, dass der Fünfstern in der Zeichnung nicht hervor-

gehoben ist. Er liegt aber ebenfalls zugrunde. In Abbildung 15c ist eine Hyperbel entstanden. Die

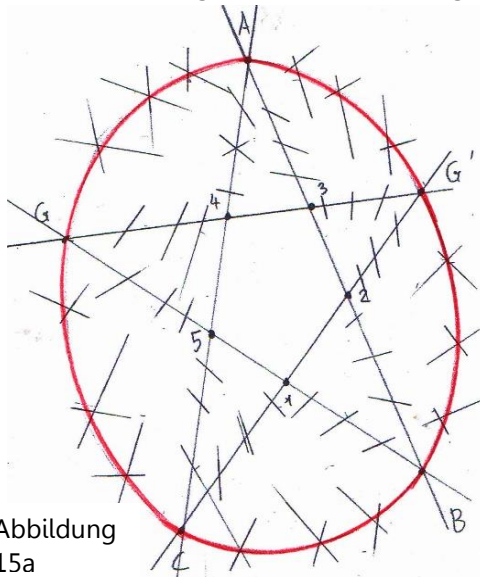


Abbildung
15a

beiden Punkte, von denen aus projiziert wird, liegen hier unendlich fern. Daher werden die beiden Geraden g und g' von parallel verlaufenden Strahlen getroffen. Ein dem Kegelschnitt angehörender Punkt ist der Schnittpunkt dieser beiden Geraden. Zwei weitere dem Kegelschnitt angehörende Punkte liegen auf g bzw. g' . Von den beiden unendlich fernen Projektionspunkten ausgehend, fällt je ein Strahl in einen dieser Punkte. Der Schnittpunkt dieser beiden Strahlen, ergibt den Punkt, der die Punkte auf den beiden Punktreihen miteinander in Beziehung setzt. Der Fünfstern ist hier nicht mehr direkt offensichtlich. Man kann sich aber denken, dass ihm die beiden Geraden g und g' angehören sowie die beiden Strahlen, die unmittelbar von ihrem unendlich fernen Träger aus in die beiden auf g und g' liegenden

Kegelschnittpunkte fallen. Die fünfte Gerade ist die Verbindungsgerade der beiden unendlich fern liegenden Büschelpunkte. Sie liegt somit selbst unendlich fern. Abbildung 15d ist aus einem relativ freien Spiel mit den Elementen Punkt und Gerade entstanden. Wiederum gehört der Schnittpunkt der beiden Geraden g und g' dem Kegelschnitt an sowie je ein Punkt auf jeder der beiden Geraden. Die beiden gewählten Projektionspunkte liegen hier ebenfalls auf dem Kegelschnitt, lediglich der dritte Punkt befindet sich ausserhalb desselben.

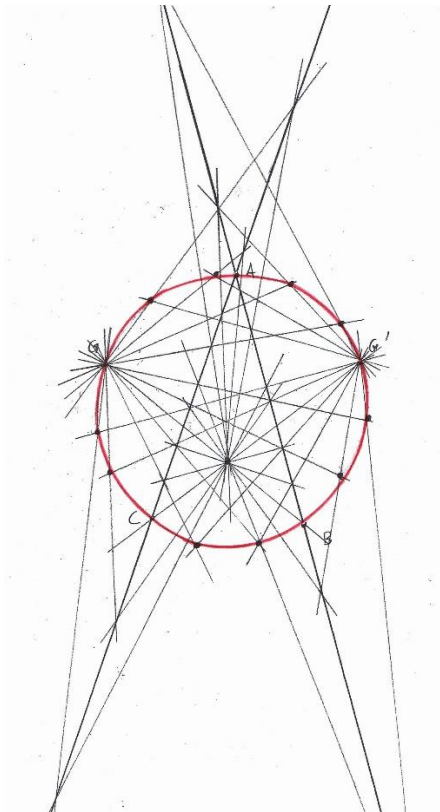


Abbildung 15b

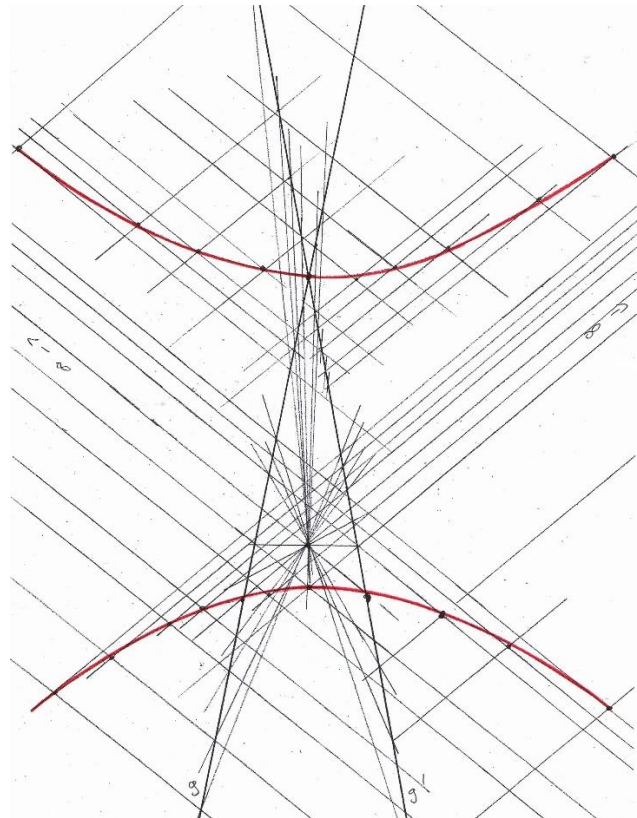


Abbildung 15c

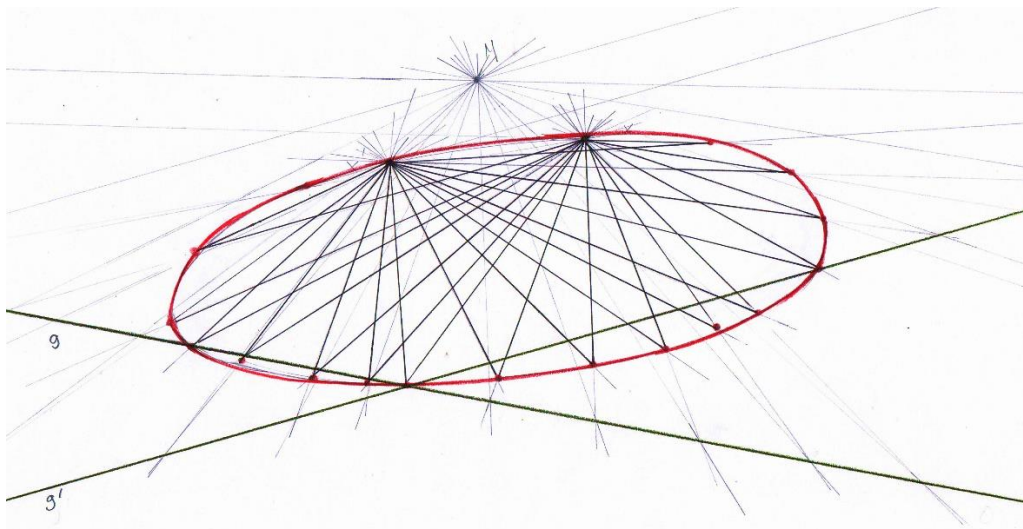


Abbildung 15d

In den folgenden Abbildungen sind Beispiele zu sehen, die zeigen, in welcher Art die beiden mit einem Fünfstern verbundenen Kegelschnitte jeweils auftreten. Am einfachsten ist das natürlich am Kreis nachzuvollziehen. Mit einem völlig regelmässig angeordneten Fünfstern sind, wie man in Abbildung 16a sieht, zwei Kreise verbunden. Es ergibt sich, dass der tangential eingehüllte Kreis die Seiten des geschlossenen fünfeckigen Gebietes berührt und so kleiner ist als der aus Punkten gebildete. Ein Gebilde, dass durch seine Tangenten geformt wird, empfindet man eher als von aussen gestaltet. Einen Kreis, dessen Linie man durch die Verbindung von Punkten hervorbringt, wird man eher auf den Mittelpunkt bezogen erleben. Insofern ergibt sich hier also ein eigenartiger Austausch der beiden Formen, den man vielleicht wie eine Durchdringung erleben kann. Die vom Mittelpunkt ausgehend gebildete Form erstreckt sich weiter nach aussen, während umgekehrt die aus der Peripherie entstandene Form näher am Zentrum der beiden Kreise liegt. Geht man zu den anderen Kegelschnitten über, so sind die beiden Formen zwar nicht mehr konzentrisch auf den gleichen Mittelpunkt bezogen, der Austausch, in dem die mehr zentrisch gebildete Form nach aussen strebt und die mehr peripherisch gebildete nach innen, bleibt aber erhalten. Abbildung 16b zeigt einen unregelmässig angeordneten Fünfstern und die mit ihm verbundenen Ellipsen. Interessant ist nun, was sich ergibt, wenn man die obere Ecke des Fünfsterns durch die Unendlichkeit zieht (Abb. 16c). Das fünfeckige Innengebiet bleibt zunächst noch geschlossen, sodass sich als innere Form wiederum eine Ellipse bildet. Die äussere Form ist nun nicht mehr im Endlichen geschlossen. Aus der Ellipse wird nun eine Hyperbel. Würde man genau das Stadium festhalten, wo der obere Spitz in die Unendlichkeit hineingelaufen ist, diese aber noch nicht durchquert hat, so würde eine Parabel entstehen. Um von einem Hyperbelast zum anderen zu gelangen, muss man die Unendlichkeit durchlaufen, im Endlichen erscheinen die beiden Äste als getrennt. Möchte man die Hyperbel vollständig durchlaufen, so muss man zweimal durch die Unendlichkeit hindurch. Zieht man statt der Spitze des Fünfsterns eine Seite desselben in die Unendlichkeit hinein, so ergibt sich eine Öffnung des inneren fünfseitigen Gebietes (Abb. 16d). Die Ellipse wird nun zur Parabel, gleichzeitig bleibt die punktuell gebildete Form eine Hyperbel. Lässt man die in die Unendlichkeit hinein gelaufene Seite diese durchqueren und von der anderen Seite wieder in die Endlichkeit eintreten, so zeigen sich beide Formen, die innere und die äussere als Hyperbeln (Abb. 16e). Verfolgt man die Abbildungen 16c bis 16e, so ergibt sich offenbar, dass die Hyperbeläste

umso flacher werden, je entschiedener sich Teile des Fünfsterns durch die Unendlichkeit ziehen und wiederum in die Endlichkeit eintreten.

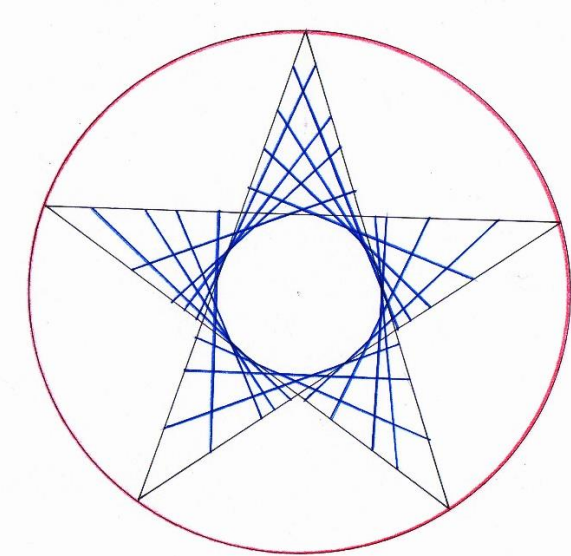


Abbildung 16a

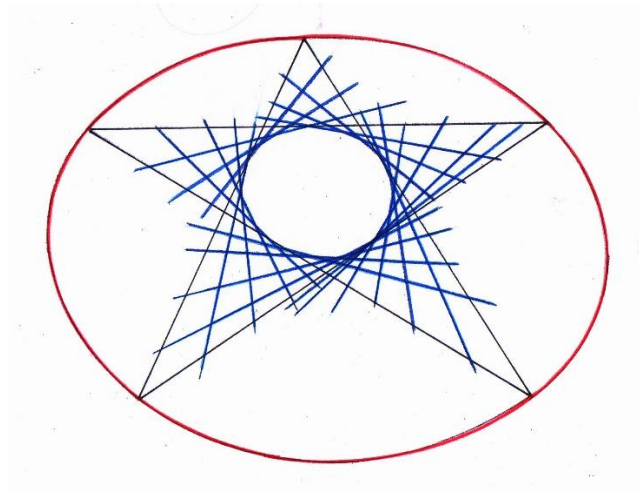


Abbildung 16b

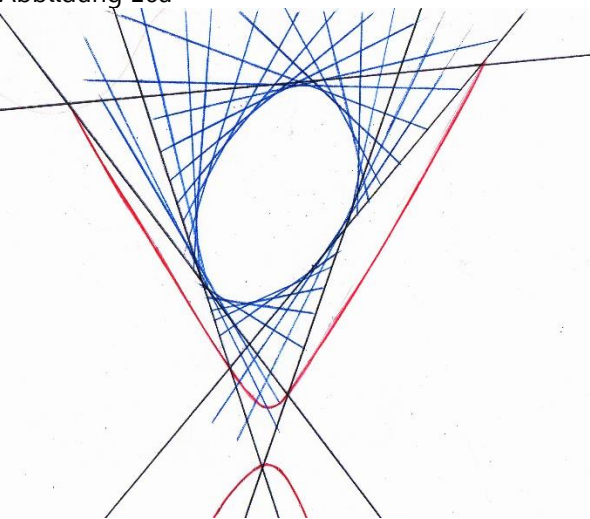


Abbildung 16c

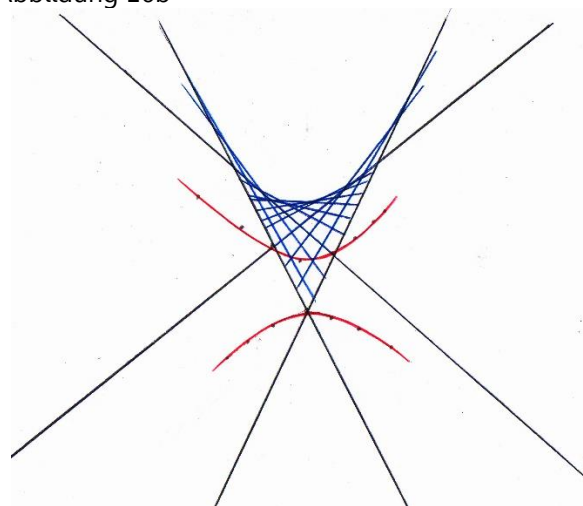


Abbildung 16d

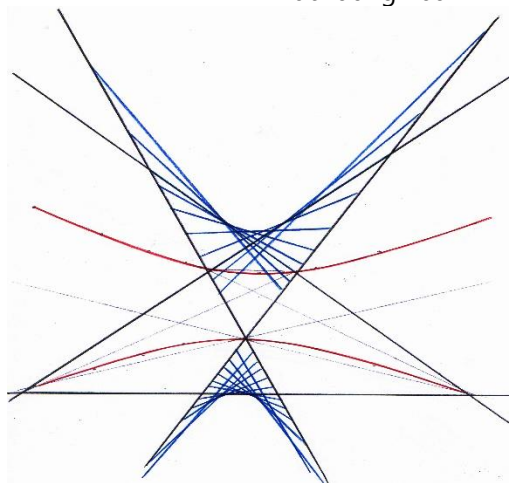


Abbildung 16e

Es ist relativ schwierig, sich in kontinuierlicher Bewegung vorzustellen, wie sich die beiden miteinander gepaarten Kegelschnitte verändern, wenn man, ausgehend von der regelmässigen oder unregelmässigen Form, wo sich Kreise oder Ellipsen ergeben, Teile des zugrunde liegenden Fünfsterns durch die Unendlichkeit wandern lässt. Der Versuch ist interessant und führt auch zu einer Belebung der vorstellenden Kräfte, er wird aber vermutlich zunächst nur teilweise gelingen. Einfacher ist es, mit einem Kegelschnitt zu beginnen. Die Verwandlung vom Kreis über die Ellipse zur Parabel und schliesslich zur Hyperbel lässt sich dann sowohl in der Vorstellung als auch auf dem Papier leichter ausführen. Man beginnt mit einem Kreis, durch den man einen Durchmesser legt. Einen der beiden Berührungspunkte des Durchmessers mit der Kreislinie hält man fest, den anderen lässt man, zunächst gedanklich, auf dem verlängerten Durchmesser nach aussen wandern. Die Kreislinie geht mit, sie bleibt mit den beiden Punkten stets verbunden. Wenn man das macht, merkt man bald, dass sich zwei Möglichkeiten ergeben. Man kann die Bewegung entweder so denken, dass der Kreis sich kontinuierlich vergrössert, aber in seiner Form zunächst erhalten bleibt. Es ergibt sich so eine Serie von Kreisen, deren Durchmesser immer grösser und deren Krümmung gleichzeitig immer geringer wird. (Abb. 17, rote Kreise) Solange der Durchmesser endliche Grösse behält, bleibt aber immer eine geringe Krümmung erhalten und die Kreislinie schliesst sich in überschaubarer Weise in der Endlichkeit. Eigenartige Verhältnisse ergeben sich dann, wenn der Durchmesser unendlich gross wird. Geschieht dies, so muss der Radius jedenfalls auch in die Unendlichkeit springen und der Kreis verliert in diesem Moment seine Krümmung. Er besteht nun aus zwei parallelen Linien, die eine davon ist die festgehaltene Tangente (die schwarze Linie in Abb. 17), die andere Linie ist die unendlich ferne Gerade, zu der man gelangt, wenn man sich von der Tangente ausgehend eine Parallelverschiebung nach rechts bis in die Unendlichkeit denkt. Beide Geraden begegnen sich in dem unendlich fernen Punkt, zu dem man gelangt, wenn man sich senkrecht vom Durchmesser wegbewegt. Die Punkte der Kreislinie ordnen sich nun auf diesen beiden Geraden an. Lässt man den Durchmesser durch die Unendlichkeit hindurchgehen, so kommt er, wenn man zunächst nach rechts gewandert ist, nun von links wieder in die Endlichkeit. Die Kreise krümmen sich nun in die andere Richtung (Abb. 17, blaue Kreise). Was vorher das Innere des Kreises war, ist nun zum Äusseren geworden und umgekehrt. Hier ergibt sich zwar, beim Gang durch die Unendlichkeit, ein Wechsel von innen und aussen, aber keine Verwandlung des Kreises in die anderen Kegelschnitte. Um diese zu erhalten, muss man die Bewegung noch anders ausführen.

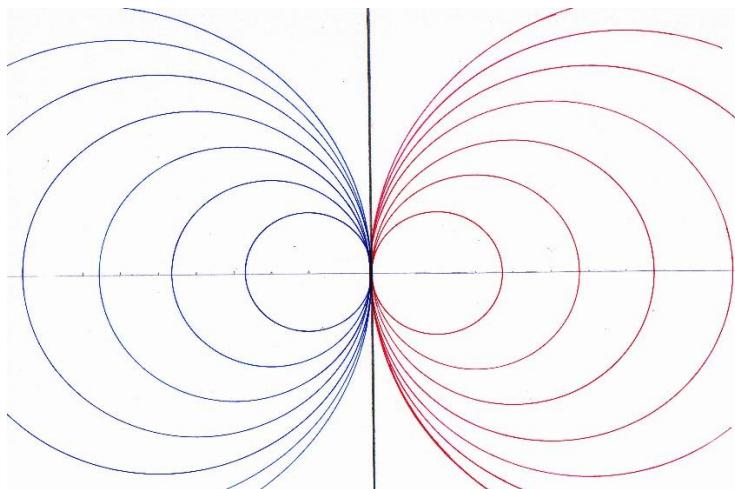


Abbildung 17

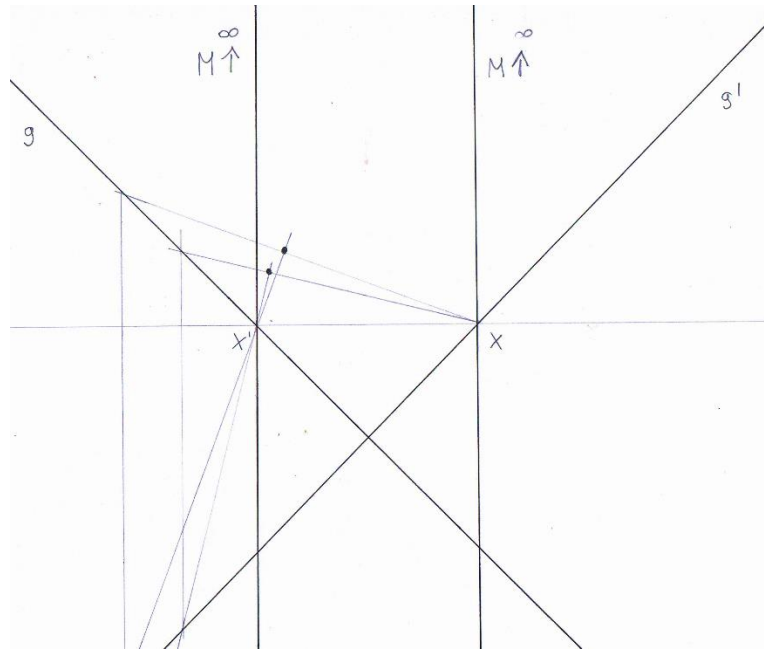


Abbildung 18

Wiederum beginnt man mit einem Kreis, durch den ein Durchmesser gelegt ist, hält den linken Punkt fest und lässt den rechten wandern. Doch nun vernachlässigt man den Kreismittelpunkt und lässt zu, dass der Kreis sich sozusagen verzieht, er nimmt nun elliptische Formen an. Diese sind zunächst bauchig, noch nahe an der Kreisform und werden schlanker, je weiter der bewegliche Punkt nach rechts wandert. Eine gewisse Krümmung behält die Ellipse jedoch immer bei. Läuft der nach rechts wandernde Punkt nun in die Unendlichkeit, so springt die Ellipse gleichsam auf, sie wird zur Parabel, deren beide Äste dort, wo sie festgehalten sind, die stärkste Krümmung aufweisen. Gegen die Unendlichkeit zu nähern sie sich der Parallellage an, die sie in der Unendlichkeit erreichen. Die Parabel berührt also die Unendlichkeit in einem Punkt. Lässt man nun den wandernden Punkt die Unendlichkeit durchstossen und von der anderen Seite her wieder in die Endlichkeit zurückkehren, so wird die Parabel zur Hyperbel. Obwohl der wandernde Punkt einmal durch die Unendlichkeit gelaufen ist, muss man, um die beiden Hyperbeläste vollständig zu durchlaufen, die Unendlichkeit zweimal durchqueren. In dieser allgemeinen Form lässt sich das relativ gut vorstellen, noch deutlicher wird es vielleicht, indem man die verschiedenen Stadien konstruiert.¹¹ Günstig ist folgende Ausgangssituation (Abbildung 18): Man wählt auf einer waagrechten Gerade die beiden Punkte X und X' und legt durch diese beiden Punkte senkrecht zur gewählten Gerade stehende Geraden. Nun legt man durch den Punkt X und durch den Punkt X' je eine Gerade, die sowohl zur Tangente als auch zur waagrechten Geraden im Winkel von 45° steht. Die beiden Geraden sind hier mit g und g' bezeichnet. Der dritte Punkt, der für die Projektion gebraucht wird, der Punkt M ist der unendlich ferne Punkt in Richtung der beiden Tangenten. Diese Anordnung macht die Konstruktion relativ übersichtlich. Indem man mit Winkelhalbierenden arbeitet, macht man natürlich eine Anleihe beim Mass. Dies wäre nicht unbedingt nötig, ist aber in diesem Fall vorteilhaft, wenn man mit dem Kreis beginnen will. Die beiden Punkte X und X' sowie der Schnittpunkt der Geraden g und g' sind Punkte der Kurve. Vom Punkt X aus sendet man Strahlen auf die

¹¹ Entsprechende Konstruktionsanleitungen findet man bei Edwards 2015

Eine Anregung, dies vorstellend zu vollziehen, gibt es bei Locher-Ernst 1973, in dem Aufsatz: Von der Geometrie der menschlichen Gestalt

Gerade g . Vom Fernpunkt M aus projiziert man die sich ergebenden Schnittpunkte auf die Gerade g' . Hier ergibt sich wiederum ein Schnittpunkt, den man mit dem Punkt X' verbindet. Der Schnittpunkt der beiden Geraden Xg und $X'g'$ ist ein Punkt der Kurve. Je nachdem, welche Punkte man erhalten möchte, kann man von X' Geraden auf g' senden und diese dann mit Hilfe des Punktes M auf g produzieren. Die Reihe der Kegelschnitte vom Kreis bis zur Hyperbel kommt nun dadurch zustande, dass man den Punkt X auf der zuerst gewählten waagrechten Gerade nach rechts verschiebt. Die Tangente durch X nimmt man dabei mit. Der Punkt X' , die durch ihn gehende Tangente sowie die Gerade g sind unbeweglich. Dies führt dazu, dass sich die Gerade g' bei nach rechts wanderndem X in dem Schnittpunkt mit der Geraden X dreht. Lässt man den Punkt X ein wenig nach rechts wandern, ergeben sich elliptische Formen. Wandert X in die Unendlichkeit, entsteht eine Parabel, durchstösst X die Unendlichkeit und tritt wieder in die Endlichkeit ein, so ergeben sich Hyperbeln. Abgesehen von der Verschiebung des Punktes X ist die Konstruktion in den Abbildungen 19a bis 19d genau gleich. Hier ergibt sich nun sowohl ein Austausch von Innen und Aussen als auch eine Verwandlung der Form. Der Kreis wird schliesslich zur Hyperbel. Während beim Kreis und bei der Ellipse der Innenraum endlich abgeschlossen ist, öffnet sich dieser bei der Parabel und berührt die unendlich ferne Gerade in einem Punkt. Bei der Hyperbel zieht sich das, was vorher Innenraum des Kreises war, durch die Unendlichkeit hindurch und erscheint von der anderen Seite wieder im Endlichen. Der von den beiden Hyperbelästen umschlossene Raum hat nun dasselbe Verhältnis zum Unendlichen, wie der andere, ergänzende Bereich, der vorher eindeutig als Aussen betrachtet worden ist. Beiden Bereichen gehört nunmehr ein Teil der unendlich fernen Linie der Ebene an. Man kann sich die entsprechende Verwandlung auch im Dreidimensionalen vorstellen. Dreht man den Kreis, von dem man ausgegangen ist, um einen Durchmesser, so ergibt sich eine Kugel. Mit dieser kann man nun die entsprechenden Verwandlungen vornehmen. Das Ergebnis wäre wiederum eine dreidimensionale Form, die sich dadurch ergibt, dass man die beiden Hyperbeläste um eine senkrechte Achse dreht, die in der Mitte zwischen den beiden Tangenten liegt. Je nach Abstand der Tangenten schmiegen sich die Hyperbeläste enger an diese an oder sind, wie hier in der Zeichnung weiter von ihnen entfernt. Stellt man sich rotierende Hyperbeln vor, die enger an die Tangenten angeschmiegt sind, so sieht man noch deutlicher, dass hier ein röhrenförmiges Gebilde entstanden ist. Was im Inneren der Röhre liegt, war vorher Aussenraum in Bezug auf die Kugel. Auch die Wölbung der Flächen ist verwandelt: Die Kugel ist von jedem Standpunkt ausserhalb derselben ein gleichmässig konvexes Gebilde, denkt man sich als Betrachter im Kugellinnern, so ist man ebenso gleichmässig konkav schalenbildend umhüllt. Denkt man sich hingegen im Inneren der rotierenden Hyperbel, so kann man, indem man den Rand derselben abtastet, beide Krümmungsrichtungen finden. Dasselbe gilt für einen Standpunkt ausserhalb der Röhre. Rudolf Steiner hat darauf hingewiesen, dass mit Hilfe von Verwandlungsprozessen solcher Art, die durch die projektive Geometrie aufgezeigt werden können, die Verwandtschaftsbeziehungen der verschiedenen Knochentypen des menschlichen Skelettes zueinander ergründet werden können. Insbesondere weist er auf das Umstülpungsverhältnis zwischen den tendenziell kugelförmigen Kopfknochen und den röhrenförmigen Gliedmassenknochen hin.¹²

¹² Vgl. Steiner 1992, GA 293, 10. Vortrag

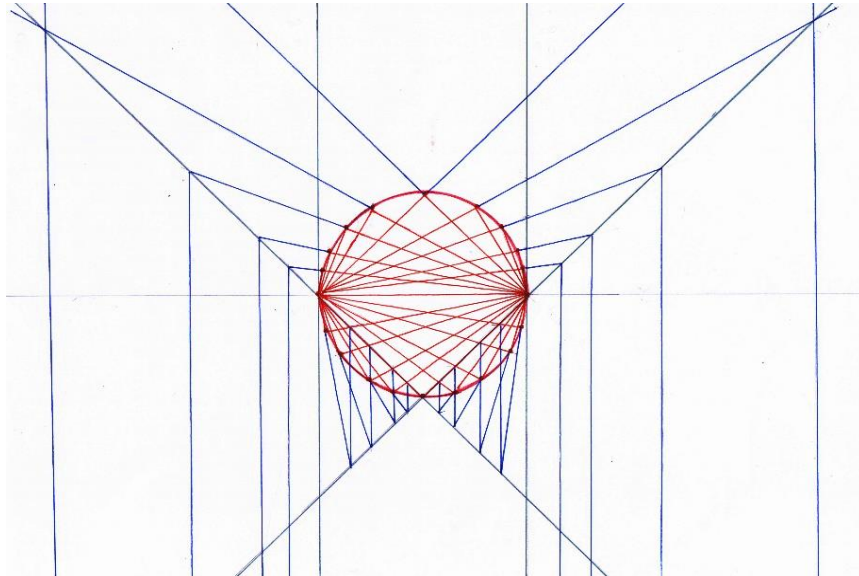


Abbildung 19a

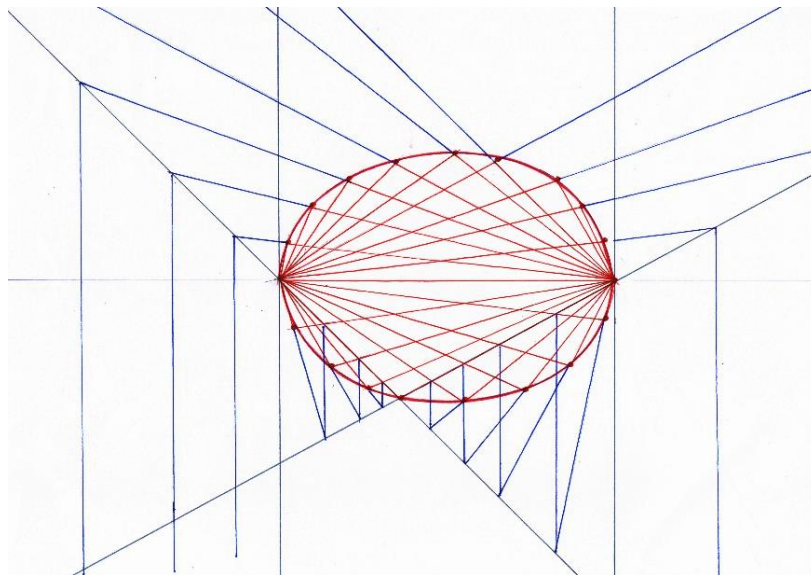


Abbildung 19b

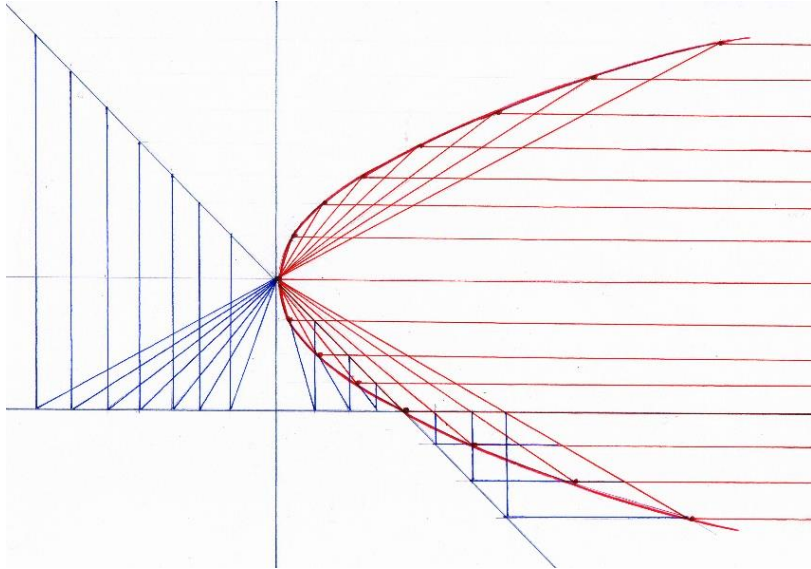


Abbildung 19c

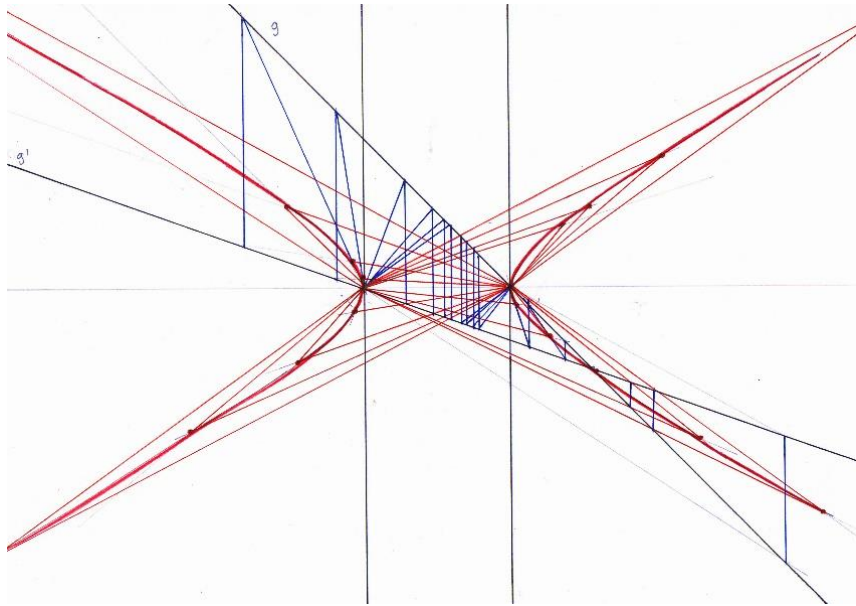


Abbildung 19d