

Was ist projektive Geometrie?

Die Grundgebilde

An dieser Stelle soll nicht eine exakte und möglichst unangreifbare Definition gegeben werden. Der Leser ist eingeladen, einige Reflexionen darüber zu teilen, wie die Mathematik und die Geometrie insbesondere ihre Wahrheiten gewinnen. Eine mathematische Formel, ein geometrischer Satz sie tragen ihre Wahrheit in sich selbst und ihre Gültigkeit ist universell. Hat man einmal eingesehen, dass in der Ebene die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks einem gestreckten Winkel gleich ist, oder, mit anderen Worten, gleich 180° ist, so braucht man sich nicht mehr durch Nachmessen oder sonstiges Ausprobieren von diesem Sachverhalt zu überzeugen. Es kann nicht anders sein. Ein weiteres, einfacheres Beispiel: Drei Punkte, die man beliebig irgendwo hinsetzt und die nicht alle auf einer Geraden liegen, legen immer eine Ebene fest. Je zwei dieser drei Punkte kann man mit einer Geraden verbinden und diese bilden dann die drei Seiten des Dreiecks. Um mich von der Richtigkeit dieser Sachverhalte zu überzeugen, muss ich nicht zum Zeichenstift greifen, das innerliche Durchdenken reicht völlig aus. Man geht mit einfachen geometrischen Gebilden, Punkten, Geraden und Ebenen zunächst um und kann sich Einsichten über deren Beschaffenheit und Verhältnisse erarbeiten. Für kompliziertere Sachverhalte ist das Anfertigen von Modellen oder Zeichnungen eine – manchmal unverzichtbare – Hilfe, weil es das Vorstellen erleichtert, oder überhaupt erst die Möglichkeit eröffnet, etwas richtig zu überschauen. Für die Überprüfung der Gesetzmässigkeit hingegen braucht man das Modell eigentlich nicht. Im Gegenteil, wenn ich eine Zeichnung anfertige, in der sich drei Geraden in einem Punkt treffen sollen und sie tun es nicht, so korrigiere ich mir den zeichnerischen Fehler durch das Abgleichen mit dem erkannten Prinzip. Man kann die geometrische Wahrheit nicht wirklich von aussen stützen. Entweder gewinnt man sie durch Einsicht in den Sachverhalt, der sich selbst erklärt oder überhaupt nicht. Dennoch können Zeichnungen oder sonstige Formen der Veranschaulichung ein wichtiges Hilfsmittel sein. Die Zeichnung dient in der Regel nicht dazu, einen Sachverhalt zu beweisen, sie erleichtert es, durch entsprechende Anregung die Vorstellung in Bewegung zu bringen. Aus diesem Grund wird im folgenden Text auch nicht versucht, mit möglichst wenig Zeichnungen auszukommen, sondern es ist, im Gegenteil, eine möglichst grosse Anschaulichkeit der Darstellung angestrebt. Erfahrungsgemäss wird so eine Belebung der vorstellenden Tätigkeit und eine Verbindung derselben mit Gefühl und Wille eher angeregt, als wenn man dem Leser einen grösseren Teil der zeichnerischen Verdeutlichung selbst überlässt. Die Elemente, mit denen man in der Geometrie arbeitet – zunächst sind es Punkte, Geraden und Ebenen – sind gedanklicher Art. Einen Punkt kann man nicht sehen. Man kann ihn erzeugen als Schnittpunkt von 2 Geraden oder 3 Ebenen. Während der Punkt überhaupt keine Ausdehnung hat, verfügt die Gerade über eine Ausdehnung in einer Dimension und die Ebene über eine solche in zwei Dimensionen. Eine Gerade kann erzeugt werden durch die Verbindung von zwei Punkten oder durch den Schnitt von 2 Ebenen, eine Ebene hingegen wird durch zwei sich schneidende Geraden oder durch drei Punkte festgelegt. Bereits an dieser Stelle kann deutlich werden, dass man sich in einem Bereich bewegt, der ausserhalb der Sinnlichkeit angesiedelt ist. Auffallend ist, dass sich die Grundelemente dadurch charakterisieren lassen, dass man auf die Art und Weise blickt, wie sie miteinander in Beziehung treten. Sie beleuchten sich sozusagen gegenseitig. Man bewegt sich also in den Verhältnissen dieser Elemente zueinander. Vollzieht man bestimmte Bewegungen mit, so ist das daraus resultierende Ergebnis vollständig einleuchtend. Man beginnt zu verstehen, was ein Punkt, eine Gerade oder eine Ebene ist. Dieses grundsätzliche Verständnis ist ausreichend, um sich einen

Begriff machen zu können, es enthält aber natürlich nicht alle prinzipiell möglichen Verbindungen, die Punkte, Geraden und Ebenen miteinander eingehen können. Diese müssen jeweils im Einzelnen aufgefunden und gebildet werden; vorher hat man sie nicht im Bewusstsein. Die Geometrie zeigt dem Menschen, dass er sich in einem sinnlichkeitsfreien Bereich bewegen kann und dort entdeckungsfähig ist. Es zeigt sich, dass diese Entdeckungen, die unabhängig vom Sinnlichen gewonnen werden, auf die sinnliche Welt in vielfältiger Weise anwendbar sind. Der Wert der Geometrie liegt aber, neben dieser Anwendbarkeit, auch darin, dass man an ihr bemerken kann, in welcher Art sich das menschliche Bewusstsein im Übersinnlichen zu bewegen vermag. So steht die Geschichte der geometrischen Entdeckungen mit der Entwicklung des menschlichen Bewusstseins in Beziehung. Die Anfänge der projektiven Geometrie fallen bezeichnenderweise zeitlich mit der Entdeckung der Perspektive durch die Maler der Renaissance zusammen.¹

In der projektiven Geometrie sind speziell zwei Entdeckungen von Bedeutung. Die eine betrifft den Einbezug der Unendlichkeit und die andere die Dualität. Ich komme darauf zurück, möchte aber zunächst die Grundgebilde erläutern, die sich dadurch ergeben, dass sowohl die Ebene als auch die Gerade oder der Punkt Träger eines der anderen Elemente sein können. Denn warum sollte man den Punkt, die Gerade und die Ebene nicht gleichberechtigt behandeln können?

Für die Ebene ist dies leicht verständlich und entspricht auch unserer Gewohnheit. Dass in einer Ebene unendlich viele Punkte liegen können, bereitet der Vorstellung keine Schwierigkeiten. Das gleiche gilt für Geraden: auch von ihnen haben sozusagen unendlich viele in einer Ebene Platz. Es ergeben sich so das Punktfeld und das Strahlenfeld. Es spricht aber nichts dagegen, in gleicher Weise die Gerade und den Punkt zu betrachten. Dass auf einer Geraden unendlich viele Punkte liegen können, ist uns ebenfalls vertraut. Weniger vertraut, aber ebenso gut möglich ist es, alle Ebenen in den Blick zu nehmen, die durch die Gerade gehen. Es sind dies alle Ebenen, die durch Drehung einer Ebene in der Trägergeraden erzeugt werden können. Es ergeben sich so die Punktreihe und das Ebenenbüschel. Aber auch der Punkt kann Träger von Geraden oder Ebenen sein. Er fasst einerseits alle Geraden, die durch ihn hindurch gehen, zusammen und andererseits alle Ebenen. So erhält man das Strahlenbündel und das Ebenenbündel. Es gibt noch ein weiteres Gebilde, bei dem sowohl die Ebene als auch der Punkt Träger sind. Dieses fasst alle Geraden zusammen, die durch einen Punkt gehen und in einer Ebene liegen. Es heisst Strahlenbüschel. Es bereitet manchmal Schwierigkeiten, die Ausdrücke Büschel und Bündel zutreffend auseinander zu halten. Ein Strahlenbüschel enthält unendlich viele Strahlen, nämlich alle Strahlen, die durch den Trägerpunkt des Büschels gehen und in der Trägerebene liegen. Dasselbe gilt für das Ebenenbüschel: es enthält alle Ebenen, die in der Trägergeraden des Büschels liegen, dies sind ebenfalls unendlich viele. Das Bündel ist gegenüber dem Büschel gleichsam mächtiger. So enthält das Strahlenbündel unendlich viele Strahlenbüschel, da es ja nicht auf eine Ebene beschränkt ist. In Bezug auf die einzelnen Strahlen wären das also unendlich mal so viele wie im Strahlenbüschel. Natürlich ist weder die einfache Unendlichkeit, noch die potenzierte Unendlichkeit abzählbar, das ändert aber nichts daran, dass in der potenzierten Unendlichkeit die einfache Unendlichkeit unendlich oft Platz hat. Dieselben Verhältnisse ergeben sich beim Ebenenbündel, dieses enthält alle Ebenenbüschel, deren Trägergeraden sich im Bündelpunkt schneiden. Dies sind wiederum unendlich viele, sodass das Ebenenbündel unendlich mal so viele Ebenen enthält, wie das Ebenenbüschel.

¹ Vgl. dazu z. B: Adams 1965, Kap. 2

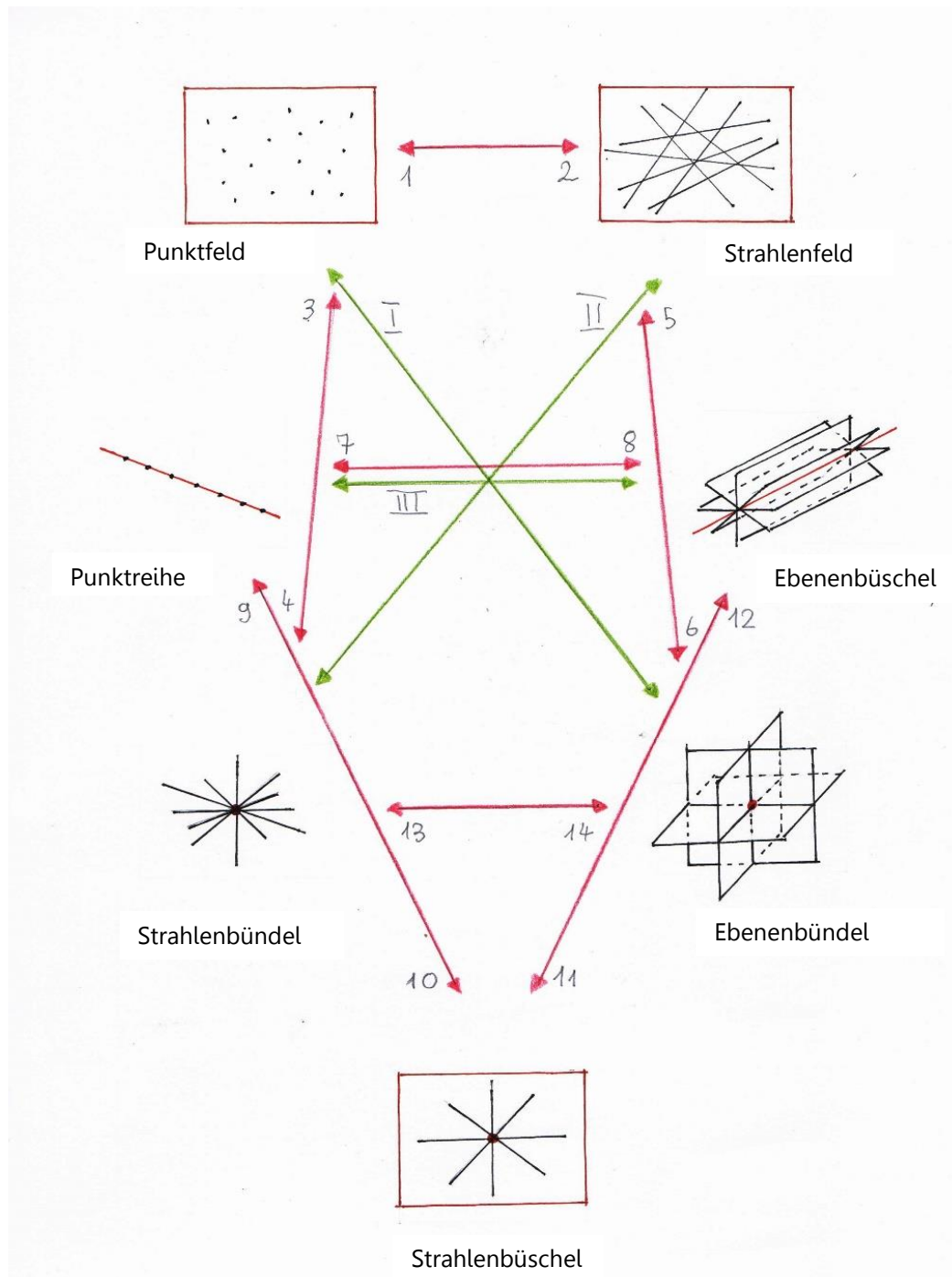


Abbildung 1

Was man als Schulgeometrie kennt, ist grösstenteils so beschaffen, dass man sich entweder im dreidimensionalen Raum oder in der Ebene bewegt. Es ist aber ebenso eine Geometrie des Punktes möglich (Bündelgeometrie, man betrachtet die gegenseitigen Beziehungen von Strahlen und Ebenen, die einen gemeinsamen Trägerpunkt haben) und auch eine solche, deren Konstruktionen von Geraden als Trägerelementen ausgehen (Strahlengeometrie, man betrachtet die gegenseitigen Beziehungen von Geraden zueinander). Zwischen den Grundgebilden gibt es mannigfaltige Beziehungen, die in der Abbildung 1 durch verschieden farbige Pfeile angedeutet

sind.² Während die grünen Pfeile duale Beziehungen aufzeigen, deuten die roten Pfeile solche Beziehungen an, die durch Trennen und Verbinden zustande kommen. Man kann das Trennen auch als ein Schneiden und das Verbinden als ein Projizieren auffassen; man kann ein beliebiges Gebilde mit einer Ebene oder einer Geraden schneiden, umgekehrt kann man es mit einem Punkt oder einer Geraden verbinden. Häufig werden dafür die Bezeichnungen Schnitt und Schein verwendet.³ Ich gehe zunächst den roten Pfeilen in der nummerierten Reihenfolge nach. Verbindet man je zwei Punkte eines Punktfeldes (1) miteinander, so erhält man ein Strahlenfeld (2). Schneidet man je zwei Geraden eines Strahlenfeldes (2) miteinander, so ergibt sich ein Punktfeld (1). Verbindet man die Punkte eines Punktfeldes (3) mit einem Punkt, der nicht in derselben Ebene liegt, so ergibt sich ein Strahlenbündel (4). Schneidet man ein Strahlenbündel (4) mit einer Ebene, die nicht durch den Bündelpunkt geht, so erhält man wiederum ein Punktfeld (3). Verbindet man das Strahlenfeld (5) mit einem Punkt, der nicht in der Trägerebene desselben liegt, so ergibt sich ein Ebenenbündel (6). Schneidet man das Ebenenbündel (6) mit einer Ebene, die nicht durch den Trägerpunkt desselben geht, so bekommt man ein Strahlenfeld (5). Verbindet man eine Punktreihe (7) mit einer Geraden, die zu dieser windschief ist, sie also nicht schneidet, so erhält man ein Ebenenbüschel (8), denn jeder Punkt der Punktreihe ergibt, mit der Geraden verbunden, eine Ebene. Schneidet man ein Ebenenbüschel (8) mit einer Geraden, die wiederum windschief zur Trägergeraden desselben ist, so ergibt sich wiederum eine Punktreihe (7). Verbindet man eine Punktreihe (9) mit einem Punkt, der nicht auf der Trägergeraden liegt, so bekommt man ein Strahlenbüschel (10). Schneidet man das Strahlenbüschel (10) mit einer Geraden, die zwar in der Trägerebene desselben liegt, aber nicht durch den Trägerpunkt geht, erhält man eine Punktreihe (9). Verbindet man ein Strahlenbüschel (11) hingegen mit einem Punkt, der nicht in der Trägerebene liegt, so ergibt sich ein Ebenenbüschel (12). Schneidet man dieses wiederum mit einer Ebene, die nicht durch den Trägerpunkt geht, so ist das Ergebnis ein Strahlenbüschel (11). Schliesslich: verbindet man je zwei Strahlen eines Strahlenbündels (13), so ergibt sich ein Ebenenbündel (14). Schneidet man je zwei Ebenen eines Ebenbündels (14) miteinander, so ergibt sich ein Strahlenbündel (13).

Die grünen Pfeile deuten duale Beziehungen zwischen den Grundgebilden an. In der Ebene stehen sich Punkt und Gerade dual oder polar gegenüber, im Raum sind es Punkt und Ebene, während die Gerade sich selbst entspricht. Zum Beispiel legen drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, immer eine Ebene fest. Polar dazu wird durch drei Ebenen, die nicht durch eine Gerade gehen, immer ein Punkt gebildet. Mit einem Punkt kann ich beliebige Gebilde verbinden, mit einer Ebene kann ich Schnitte ausführen. Die Gerade hat in gewisser Weise eine übergeordnete Stellung, denn sie eignet sich für beides: ich kann mit ihr sowohl schneiden als auch verbinden und sie kann auch selbst durch beide Prozesse gebildet werden. Sie kann sowohl durch die Verbindung von zwei Punkten als auch durch den Schnitt von zwei Ebenen entstehen.

² Louis Locher-Ernst hat sich ausführlich mit den gegenseitigen Beziehungen der Grundgebilde beschäftigt. Vgl. dazu: Locher-Ernst 2016, Locher Ernst 1970 sowie Locher Ernst 1980

³ Vgl. Locher-Ernst 2016, Kap. 5: Schein und Schnitt

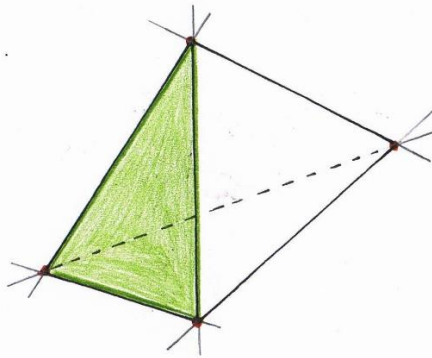


Abbildung 2

Der Tetraeder gehört nicht zu den hier betrachteten Grundgebilden. Er stellt aber ein schönes Beispiel eines einfachen räumlichen Körpers dar, der zu sich selbst dual ist. Ich kann ihn dadurch entstehen lassen, dass ich beliebige vier Punkte im Raum wähle, die nicht in einer Ebene liegen. Durch die Verbindung dieser Punkte erhalte ich sechs Kanten, bzw. vier Ebenen. Ebenso kann ich das Umgekehrte tun: ich wähle vier beliebige Ebenen, die nicht alle durch einen Punkt gehen. Je zwei der Ebenen schneiden sich in einer Kante und so entstehen insgesamt sechs Schnittkanten. Je drei der Ebenen bilden einen Schnittpunkt, wodurch sich die vier Ecken bilden. Ausgehend von vier Punkten oder von vier Ebenen bin ich durch meine Konstruktion zu demselben Körper gelangt. Die grünen Pfeile in der Zeichnung verbinden jeweils 2 Körper, die zueinander dual sind. Der Punkt und die Ebene tauschen hier jeweils die Rollen, während die Gerade in ihrer Funktion bleibt. So ist das Punktfeld dual zum Ebenenbündel (I) In dem einen Fall ist die Ebene Träger von Punkten, im anderen Fall ist der Punkt Träger von Ebenen. Das Strahlenfeld (II) ist dual zum Strahlenbündel, im ersten Fall trägt die Ebene die Geraden, im zweiten Fall trägt der Punkt die Geraden. Bei der Punktreihe (III) ist die Gerade Träger von Punkten, beim Ebenenbüschel ist die Gerade Träger von Ebenen. Das Strahlenbüschel ist wiederum zu sich selbst dual, denn hier ist sowohl ein Punkt als auch eine Ebene Träger von Geraden. Ich kann das Gebilde vom Punkt ausgehend oder von der Ebene ausgehend bilden. Es ergibt sich in beiden Fällen dasselbe.

Die Fernelemente

Eine wesentliche Entdeckung, die die projektive Geometrie bereichert, ist die, dass das unendlich Ferne nicht ausgespart bleiben muss. Es kann in die Konstruktionen einbezogen werden und nimmt so nicht eine Sonderstellung ein, wie in der euklidischen Geometrie. Für Euklid ist es klar, dass zwei Geraden, die in einer Ebene liegen, immer einen Schnittpunkt haben, es sei denn, sie sind parallel. In diesem Fall schneiden sie sich nicht. Im Falle der Parallellage fällt also eine Eigenschaft weg, die sonst immer vorhanden ist. Das hängt damit zusammen, dass die Untersuchungen in der euklidischen Geometrie an das Maß geknüpft sind. Parallele Geraden haben immer eine bestimmte, messbare Entfernung voneinander und dass sich diese ändern soll, wäre mit dem Begriff der Parallelität nicht in Einklang zu bringen. Liegen zwei Geraden in einer Ebene so, dass sich deren Abstand ändert, so müssen sie sich in irgendeinem angebbaren Punkt schneiden. Ist das nicht so, so ergibt sich, dass der Abstand zwischen den beiden Geraden gleich-

bleiben muss. Das ist logisch nachvollziehbar, nur entsteht die Frage, ob und in wieweit der Begriff des Abstands auf Entfernungen, die man als unendlich beschreibt, die also selbst nicht mehr messbar sind, überhaupt anwendbar ist. Euklid hat folgerichtig über das unendlich Ferne keine Aussage gemacht, da es sich einem Bewusstsein, das sich in endlich begrenzten Bereichen messend betätigt, entzieht. In der projektiven Geometrie versucht man nun, die Elemente Punkt, Gerade und Ebene in ihrer ganzen Ausdehnung in den Blick zu nehmen. Man betrachtet also eine Gerade in ihrer ganzen Länge und nicht nur einen Teilbereich, eine Strecke. In gewisser Hinsicht hat man es hier mit einer Paradoxie zu tun: Während man im geometrischen Bereich eine Ausnahme beseitigt und damit Vereinfachung und grössere Geschlossenheit herbeiführt, ist das Bewusstsein mit der Schwierigkeit konfrontiert, etwas zu denken, was den Bereich der Endlichkeit und damit der Vorstellungen, so wie man sie gewohnt ist zu bilden, übersteigt. Ein unendlicher Abstand ist nicht messbar und somit nicht im üblichen Sinne definierbar. Auch kann man schlecht mit räumlichen Begriffen angeben, „wo“ sich die Unendlichkeit befindet. Es geht also um die Erschliessung eines neuen Bewusstseinsraumes.

Die projektive Geometrie arbeitet nicht mit messbaren Abständen, sondern mit Beziehungen und Bewegungen qualitativer Art. Um zum Beispiel eine Gerade in ihrer Ganzheit erfassen zu können, ist es hilfreich, einen in ihr liegenden Punkt in Bewegung zu bringen. Das kann in folgender Art geschehen: Von einem Dreieck hält man die beiden Ecken A und B, die die Basis begrenzen, fest und lässt die Ecke C auf einer Geraden nach oben laufen. Das Dreieck verändert dadurch seine Form. Es verwandelt sich von einem stumpfwinkligen über ein rechtwinkliges in ein immer spitzer werdendes. Nun kann ich die Ecke C nicht nur dadurch bewegen, dass ich sie gleichsam nach oben ziehe, sondern auch dadurch, dass ich die Seiten a und b in den Punkten B und A gleichmässig drehe, im Punkt A gegen den Uhrzeigersinn, im Punkt B mit demselben. Für den Moment ist es am einfachsten, von einem gleichschenkligen Dreieck auszugehen, dessen symmetrische Form durch die Drehbewegung erhalten bleibt. Wird diese Bewegung fortgesetzt, so ergibt sich irgendwann die Situation, dass die Seiten a und b parallel zueinander liegen. In diesem Moment kann man nicht mehr angeben, wo sich der Punkt C als Schnittpunkt der beiden Geraden a und b befindet. Führt man die Drehbewegung über die Parallellage hinaus weiter fort, so kommt der Punkt C von unten her wiederum in die Sichtbarkeit. Es gibt sozusagen nur einen einzigen Moment, wo er sich derselben entzogen hat, nämlich im Augenblick der Parallelität. Blickt man auf die Drehung, so ist dieser Moment gar kein besonderer, er ergibt sich im Verlauf der Bewegung in ganz gleicher Art wie alle anderen. Ihn besonders hervorheben zu wollen, wäre sozusagen eine künstliche Unternehmung. In anderer Hinsicht ist diese Situation allerdings schon ausgezeichnet. Blickt man auf die Geschwindigkeit des wandernden Punktes, so kann man bemerken, dass diese in der Nähe der Seite c gering ist, am geringsten in dem Moment, wo der Punkt C auf der Seite c zu liegen kommt und das gegen die Unendlichkeit zu die Bewegung des Punktes beschleunigt wird, bis sie beim Durchgang durch die Unendlichkeit jedes messbare Mass übersteigt und selbst unendlich wird. Die Drehbewegung führt dazu, dass der Punkt C die ganze Gerade durchläuft und wieder zu seinem Ausgangspunkt zurückkommt. Offensichtlich kann man eine Gerade als ein Gebilde auffassen, das die Unendlichkeit durchläuft oder durchstösst und, ohne eine Krümmung aufzuweisen, in sich selbst geschlossen ist.

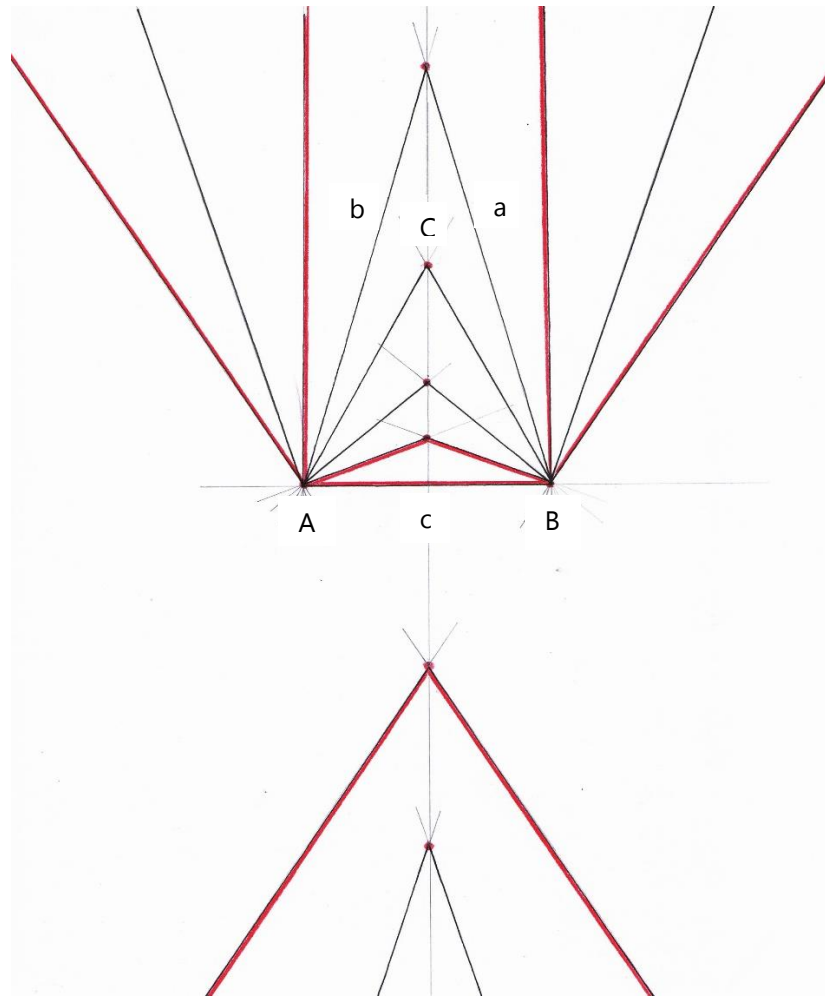


Abbildung 3

Zur näheren Charakterisierung sei die Bewegung des Punktes auf der Geraden noch in etwas anderer Art betrachtet. Statt von einem Dreieck gehen wir nun von einer Geraden aus und von einem Punkt, der nicht in ihr liegt. Durch diesen Punkt wird eine Gerade gelegt und gedreht. Wir betrachten nun die Schnittpunkte, die sich durch diese Drehbewegung ergeben. In der Abbildung 4 ist die Drehung so dargestellt, dass die Position des drehenden Strahles in gleichmässigen Winkeln festgehalten wird. Dadurch kann man die Bewegung des Schnittpunktes auf der Geraden verdeutlichen. Die Drehbewegung selbst ist so gedacht, dass sie in gleichbleibender Geschwindigkeit verläuft. Die Geschwindigkeit, mit der der Strahl die Gerade überstreicht, ist an der Stelle, wo der Strahl senkrecht auf die Gerade trifft, am geringsten. Je weiter sich der Strahl in Richtung der Parallellage bewegt, umso grösser werden die Abstände zwischen den jeweiligen, in der Zeichnung festgehaltenen Situationen. Verläuft die Drehung gegen den Uhrzeigersinn, beginnend mit dem senkrecht auf die Gerade treffenden Strahl, so beschleunigt dieser kontinuierlich auf seinem Weg nach rechts, bis er schliesslich, kurz vor der Parallellage in einem winzigen Zeitmoment einen Abschnitt der Geraden überstreicht, der sich der Messbarkeit völlig entzieht. In dem Moment, in dem er in die Unendlichkeit hinein und durch sie hindurchtritt, erreicht er selbst eine unendliche, nicht mehr messbare Geschwindigkeit und kommt von links, kontinuierlich langsamer

werdend, zurück. Ordnet man die Zeichnung so an, dass einer der Strahlen genau senkrecht auf die Gerade trifft, so ergibt sich eine Symmetrie zwischen den nach rechts grösser werdenden und von links her kleiner werdenden Abständen.⁴ Man kann die Konstruktion auch so auffassen, dass ein Strahlenbüschel mit einer Geraden geschnitten wird und so jedem Strahl des Büschels einen Punkt der Geraden zuordnet. Dem Strahl des Büschels, der parallel zur Geraden liegt, ist dann der unendlich ferne Punkt der Geraden zugeordnet. Obwohl dieser Punkt nicht rechnerisch zu ermitteln ist, so existiert er doch, denn er ergibt sich einfach dadurch, dass ein Strahl, durch kontinuierliche Drehung, die gesamte Gerade überstreicht. Dass dies im Moment der Parallellage anders sein sollte, macht logisch wenig Sinn. Etwas anderes ist es aber, sich von den Verhältnissen im Moment der Parallellage durch Anschauung zu überzeugen. Wir sind hier wiederum mit der schon erwähnten Paradoxie konfrontiert, dass eine logische Vereinfachung, die sich durch Beseitigung von Ausnahmen ergibt, die Anschauung vor besondere Herausforderungen stellt. Denn rein sinnlich, bzw. mit einem sinnengebundenen Bewusstsein ist der Schnittpunkt nicht zu ermitteln und man kann auch dessen Abstand von einem gegebenen Punkt oder Ort nicht angeben. Versucht man, sich mit dem Punkt auf seinem Weg zu identifizieren, so begegnet man der Schwierigkeit, dass man z. B. Beschleunigung nur in Bezug auf etwas feststellen kann. Die Beschleunigung des Punktes auf der Geraden ist ja gerade dadurch auffällig, dass man sie ins Verhältnis setzt zu der Drehbewegung des Strahles, die mit gleichbleibender Geschwindigkeit geschieht. Man kommt also nicht zum Ziel, wenn man sich nur innerlich in den sich beschleunigenden Punkt hineinversetzt, denn mit der Vorstellung des immer schneller Werdens kommt man bis zu einer bestimmten Grenze, wo man dann innerlich nicht mehr mitgehen kann. Es ergibt sich die Schwierigkeit, eine Bewusstseinsform, wenigstens anfänglich, auszubilden, in der man sich gleichzeitig mit einer Einzelheit und mit dem ganzen Vorgang identifiziert, sozusagen das eine im anderen denkt. Dies ist im Erkenntnisvorgang im Grunde immer der Fall. Man ist sowohl mit den befragten Einzelheiten verbunden als auch mit der Gesamtheit des Vorgangs. Nur treten die Einzelheiten deutlicher ins Bewusstsein, die Verbindung mit dem ganzen Vorgang ist zwar tatsächlich vollzogen, deren Bewusstwerdung wird aber zunächst von dem Bezug auf die Einzelheiten übertönt. Was ergibt sich denn, wenn ich mich nicht nur auf die Einzelheiten blickend erlebe, sondern mich zugleich in einer Ganzheit stehend weiss? Der Moment, in welchem der Punkt die Unendlichkeit durchläuft, ist eben nur in einer solchen paradoxen Bewusstseinsverfassung zum Erlebnis zu bringen. Für einen Augenblick weite ich mich in den Umkreis und bemerke, dass dasjenige, was soeben unendliche Geschwindigkeit war, nun in absolute Ruhe und Überschau umschlägt. Ich umfasse in mir die Gerade in ihrer Ganzheit und nicht nur deren sichtbare Abschnitte. Ich bin, für einen kurzen Moment, überall zugleich, ohne jedoch den Bezug auf mein Problem aus den Augen zu verlieren. Ähnliches geschieht mit dem Punkt beim Durchgang durch die Unendlichkeit. Läuft er nach rechts in die Unendlichkeit hinein und kommt von links her aus der Unendlichkeit zurück, so hat er einerseits nur einen Punkt überquert, andererseits aber eine Sphäre durchschritten, in welcher sich die Innenseite dessen, was äusserlich unendliche Geschwindigkeit ist, als absolute Ruhe enthüllt. Mit dieser Paradoxie sind viele Rätsel verbunden, ein Anfang der Bewusstseinsweiterung ist gemacht, wenn sie in ihrer merkwürdigen Verbindung von Gesetzmässigkeit und Öffnung erlebt wird.

⁴ Zu den merkwürdigen Verhältnissen, die sich ergeben, wenn man das Verhältnis von Einstrahlung und Ausstrahlung in den Blick nimmt, findet man Anregendes bei Locher-Ernst 2016, Kap. 4: Das Unendlichferne in der Geometrie

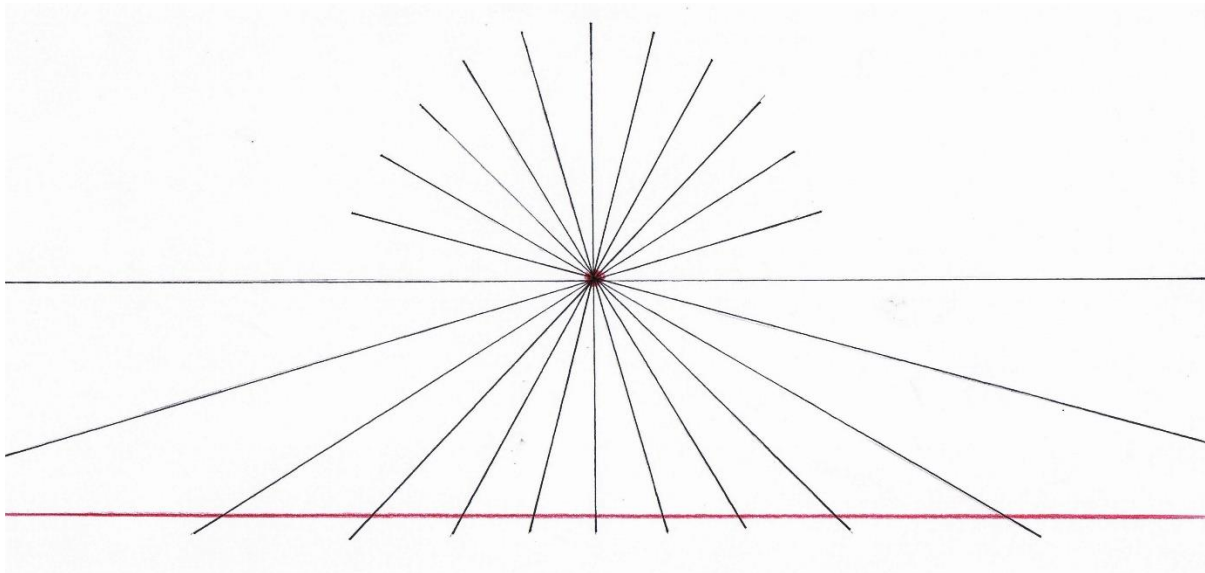


Abbildung 4

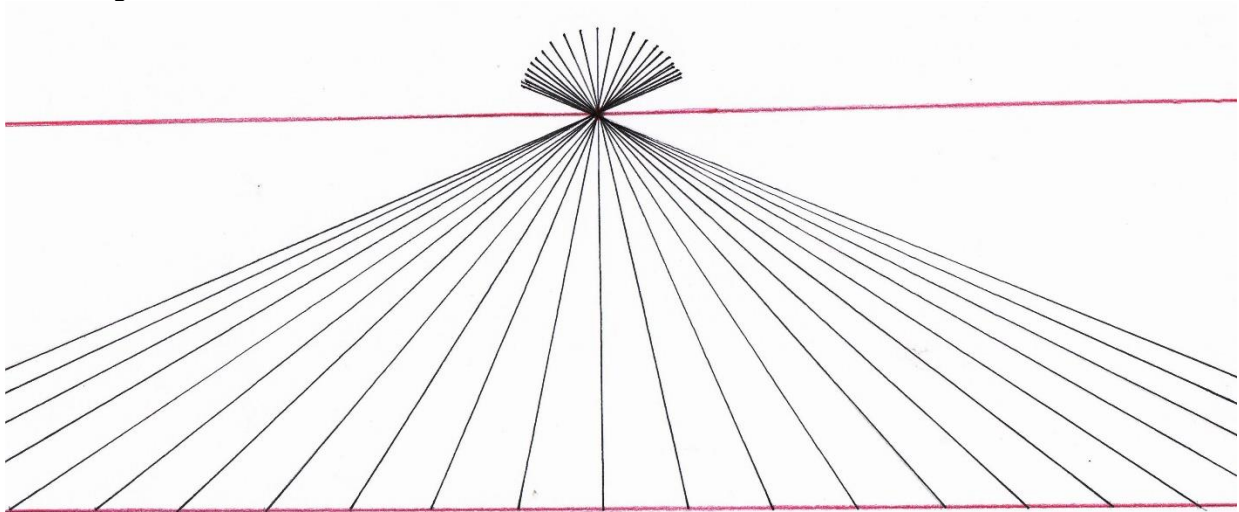


Abbildung 5

Es gibt eine zweite Möglichkeit, die Drehbewegung auszuführen, nämlich so, dass die Abstände auf der von dem Strahl geschnittenen Geraden gleichbleiben. Nicht die Drehung als solche erfolgt hier mit gleichmässiger Geschwindigkeit, sondern das Überstreichen der unteren Geraden (s. Abb. 5). Dies ergibt eine Stauung in dem drehenden Büschel. Denn wenn ich für jeden Schritt eine bestimmte, gleichbleibende Zeit brauche, dann lässt sich der Abstand des Schnittpunktes von seinem Ausgangspunkt und die Zeit, die er braucht, um dort hinzugelangen, stets berechnen. Ich kann den so beschaffenen Weg fortsetzen, solange, wie ich will, ich kann immer angeben, wieviel Schritte ich gemacht habe und einen nächsten hinzufügen. Auf diese Weise gelangt der drehende Strahl aber nie wirklich in eine Lage, die zur unteren Gerade parallel ist, obwohl die Anzahl der möglichen Schritte nicht begrenzt ist. Es ist also ein prinzipieller Unterschied zwischen einer Unendlichkeit, die sich durch das unbegrenzte Fortsetzen metrisch gleicher Schritte ergibt und einer solchen, die einen qualitativ anderen, nicht metrisch zu erschliessenden Bereich integriert. Bis jetzt haben wir versucht, die Gerade in ihrer Ganzheit zu erfassen. Was ergibt sich, wenn man dasselbe mit einer Ebene macht? Wir stellen uns zwei Ebenen vor, die eine bleibt in Ruhe, die

andere dreht in einer Geraden, erzeugt also ein Ebenenbüschel. Der Einfachheit halber legen wir die Trägergerade des Ebenenbüschels parallel zur unteren Ebene, sodass sie sich nicht in einem endlichen, sondern im unendlich fernen Punkt schneiden. Wir betrachten die Schnitte, die die drehende Ebene in der in Ruhe bleibenden erzeugt. Es sind jeweils Geraden.

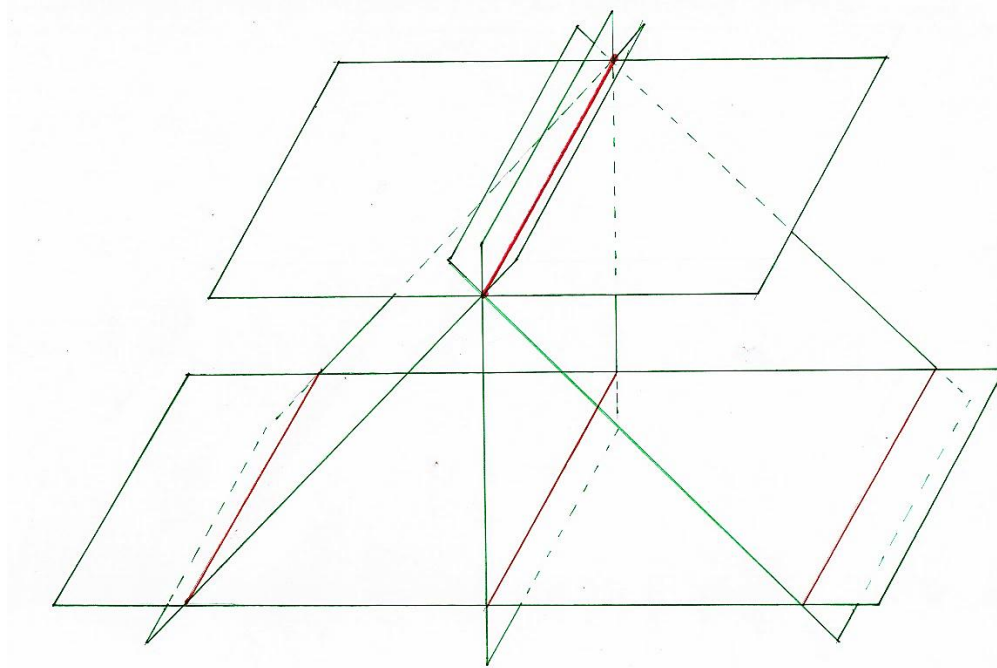


Abbildung 6

Durch die vor uns liegende Ebene wandert also nun eine Gerade, im Falle der Drehung gegen den Uhrzeigersinn, nach rechts, durchläuft die Unendlichkeit in dem Moment, wo die beiden Ebenen parallel liegen und kehrt von links aus der Unendlichkeit zurück. Die Bewegungsdynamik ist ganz ähnlich derjenigen, die der durch die Drehung des Strahles auf der Geraden erzeugte Schnittpunkt zeigt. Nur kann die Gerade auf der Ebene nicht nur in einer Richtung laufen, sondern in beliebige, da die Ebene nicht eine Richtung festlegt, sondern alle in ihr liegenden zulässt. Die Trägergerade des Ebenenbüschels kann in einer Ebene, die zur unteren parallel liegt, beliebig gedreht werden und in jeder Richtung, in der sie liegt, erzeugen die drehenden Ebenen die gleiche Dynamik. Zwei Ebenen, die parallel liegen, schneiden sich in jeder in ihnen möglichen Richtungen in derselben Ferngeraden. So wie der Punkt, wenn er die Gerade ganz durchläuft, einmal durch die Unendlichkeit hindurchgeht, so muss jede Gerade, die die Ebene gänzlich überstreicht, einmal mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen. Die Ebene ist also ein in sich geschlossenes Gebilde. Jeder Punkt, der sich auf ihr in einer Geraden bewegt, kann, nachdem er durch die Unendlichkeit gelaufen ist, in seine ursprüngliche Position zurückkehren. Jede Gerade, die die Ebene überstreicht, kehrt, indem sie parallel zu sich selbst verschoben wird, nach dem Durchgang durch die Unendlichkeit in ihre Ausgangslage zurück. Im Falle der oben beschriebenen Bewegung fällt sie einmal mit der unendlich fernen Geraden zusammen, unabhängig davon, in welcher Richtung die Bewegung verläuft. Zum Umfang aller Geraden, die in der Ebene liegen, gehört also eine unendlich fern liegende hinzu.

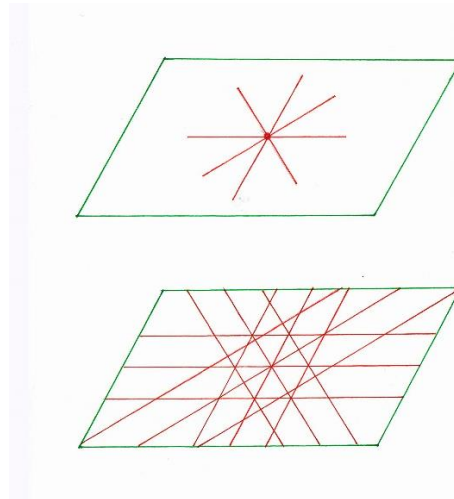


Abbildung 7

Die Betrachtungen über den unendlich fernen Punkt und die unendlich ferne Gerade versetzen uns nun in die Lage, auch solche Grundgebilde zu beschreiben, deren Trägerpunkt oder Trägergerade unendlich fern liegt. Denn parallele Geraden schneiden sich stets in ein und demselben unendlich fernen Punkt und parallele Ebenen in ein und derselben unendlich fernen Geraden. Daraus ergibt sich, dass parallele Geraden, die in einer Ebene liegen, ein Strahlenbüschel mit unendlich fernem Trägerpunkt darstellen (Abb. 8). Dasselbe gilt für parallele Ebenen, man kann sie als Ebenenbüschel mit unendlich ferner Trägergerade ansehen (Abb. 9). Parallele Geraden, die nicht alle in einer Ebene liegen, gehen dennoch durch denselben unendlich fernen Punkt, sie bilden ein Strahlenbündel mit unendlich fernem Trägerpunkt (Abb. 10). Entsprechendes gilt für Ebenenbüschel, deren Trägergeraden zueinander parallel liegen. Die Trägergeraden begegnen sich in demselben unendlich fernen Punkt; dieser ist folglich der Trägerpunkt des gesamten Ebenenbündels (Abb. 11).

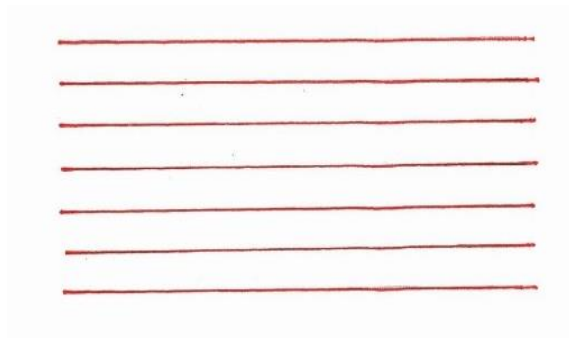


Abbildung 8

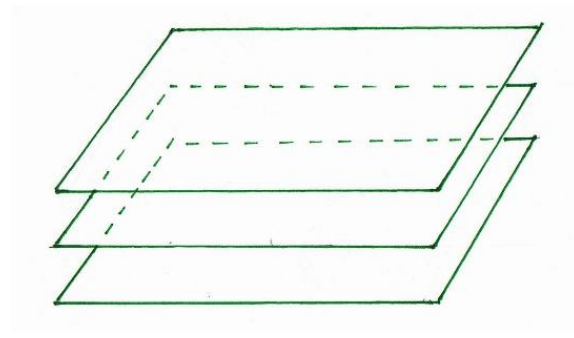


Abbildung 9

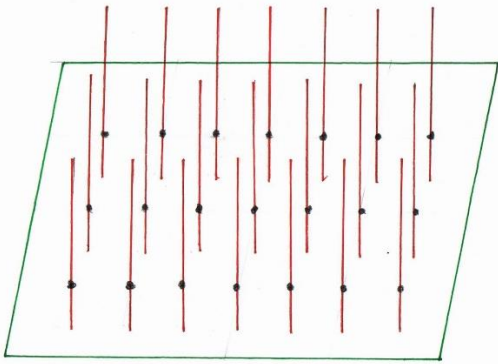


Abbildung 10

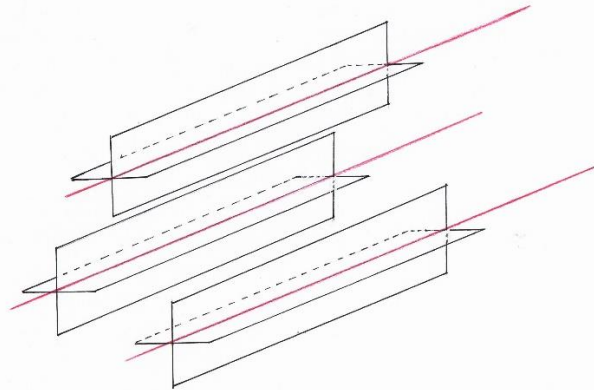


Abbildung 11

Wir haben gesehen, dass sowohl Punkte als auch Geraden unendlich ferne Lage haben können. Wie steht es diesbezüglich mit der Ebene? Um diese Frage zu klären, müssen wir von einem Gebilde im dreidimensionalen Raum ausgehen, am besten geeignet ist die Kugel. Man kann sich vorstellen, dass man sich im Mittelpunkt einer Kugel befindet und die gleichmässig in alle Richtungen strahlenden Radien verfolgt. Je grösser der Radius, umso schwächer ist die Krümmung der Kugeloberfläche und umgekehrt: je kleiner der Radius, umso grösser die Krümmung. Lässt man den Radius schrumpfen, so fällt in dem Moment, wo er Null wird, wo man ihm also keine Ausdehnung mehr belässt, die gesamte Kugel in den Mittelpunkt. Was geschieht, wenn man umgekehrt vorgeht? Der Radius wird grösser, die Kugel dehnt sich aus, entsprechend wird die Krümmung kleiner. Solange der Radius eine messbare Grösse hat, ist die Kugel irgendwie überschaubar, man kann z. B. ihre Oberfläche und ihr Volumen berechnen. Wie sieht es in dem Moment aus, wo der Radius unendlich wird? Vom Mittelpunkt aus gesehen, entfernt sich die Kugeloberfläche in alle Richtungen gleichmässig. Je zwei gegenüberliegende Punkte erreichen gleichzeitig die Unendlichkeit, fallen also, indem sie aus verschiedenen Richtungen kommen, in den einen unendlich fernen Punkt des jeweiligen Durchmessers zusammen. Sämtliche Durchmesser der Kugel, die in einer Ebene liegen, begegnen sich in diesem Moment auf der unendlich fernen Geraden dieser Ebene. Alle Kugelenebenen, die durch den Mittelpunkt gehen, beschreiben in diesem Augenblick eine unendliche Anzahl von unendlich fernen Geraden. Sie liegen alle in einer Ebene, der unendlich fernen Ebene des Raumes. Diese Ebene ist für alle Kugeln, die sich in dem uns bekannten dreidimensionalen Raum befinden, dieselbe, unabhängig davon, an welcher Stelle im Raum ich die Kugel zuerst vorgestellt oder konstruiert habe. Während sich also eine unendliche Anzahl von Fernpunkten oder Ferngeraden gezeigt hat, so ergibt sich aus den obigen Überlegungen eine Ergänzung der unendlichen Anzahl möglicher Ebenen durch eine Fernebene. Man kann die Gerade als in sich geschlossenes Gebilde betrachten, indem man ihre Punkte um einen unendlich fern liegenden ergänzt. Ein sie durchwandernder Punkt kehrt zu seinem Ausgangspunkt zurück, nachdem er die ganze Gerade durchlaufen hat. Dasselbe ist mit der Ebene möglich: alle in ihr liegenden Geraden ergänzt man um eine unendlich fern liegende, wodurch die Ebene auch als geschlossenes Gebilde durchlaufen werden kann. Eine sie überstreichende Gerade kehrt in ihre Ausgangsposition zurück, nachdem sie die ganze Ebene durchlaufen hat. Wie ist es nun mit dem Raum? Kann eine den Raum durchlaufende Ebene zu ihrem Ausgangspunkt zurückkehren. Man betrachte nochmals das Ebenenbüschel mit unendlich ferner Trägergerade (Abb.9). Nehmen wir an, eine Ebene des Büschels rotiert, indem sie nach oben wandert. In einem Moment verlässt sie

die Sichtbarkeit und fällt mit der Fernebene des Raumes zusammen, im nächsten Moment tritt sie von unten kommend, wieder in die Sichtbarkeit ein und kehrt zu ihrem Ausgangspunkt zurück. Diese Möglichkeit ist unabhängig von der Stellung der Ebenen im Raum, d. h. unabhängig davon, wie die Trägergerade in der Fernebene liegt. Jedes Parallelebenenbüschel enthält die unendlich ferne Ebene. Bezeichnet man die Ausrichtung einer Ebene im Raum als deren Stellung, so ergibt sich die Merkwürdigkeit, dass die unendlich ferne Ebene des Raumes selbst keine spezifische Stellung hat, aber in jeder Stellung enthalten ist. Das Umfassende ist so Bestandteil desjenigen, was umfasst wird. Es ist eine Errungenschaft der projektiven Geometrie, durch Einführung der Fernelemente bestimmten Gesetzmässigkeiten zu einer Gültigkeit zu verhelfen, in der es keine Ausnahmen mehr gibt. Man muss nun nicht mehr unterscheiden, ob zwei Geraden, die in einer Ebene liegen, einen Schnittpunkt haben oder parallel sind. Sie haben auf jeden Fall einen Schnittpunkt, ebenso wie zwei Ebenen auf jeden Fall eine Schnittgerade haben. Es ist auch wichtig zu bemerken, dass man mit den Fernelementen nach den gleichen Gesetzmässigkeiten konstruieren kann wie mit Elementen, die im Endlichen liegen. Insofern sind die Fernelemente nicht besonders hervorgehoben, sie stellen keine Ausnahme dar. In anderer Hinsicht tun sie dies allerdings doch. Die Fernebene ist den anderen Ebenen insofern übergeordnet, als dass sie eine Eigenschaft unbestimmt hält, die in jeder im Endlichen liegenden Ebene bestimmt ist, nämlich ihre Stellung. Diese Unbestimmtheit führt zugleich dazu, dass die unendlich ferne Ebene die konkrete Beeigenschaftung jeder Ebene, die ihr selbst fehlt, in sich aufnehmen kann. Vergleichbares gilt für die Ferngerade. Jedes Parallelstrahlenbüschel, unabhängig davon, in welcher Richtung seine Gerade liegen, enthält die Ferngerade der Ebene. Diese selbst ist gleichsam richtungslos und kann gerade deshalb alle Richtungen in sich aufnehmen. Ich halte es für wahrscheinlich, dass man durch weiteres Verfolgen dieses Sachverhalts zu allgemeineren Aufschlüssen über das Verhältnis von Endlichkeit und Unendlichkeit gelangen kann, die nicht nur für die Geometrie von Bedeutung sind.⁵

Dualität

Im Folgenden soll das Prinzip der Dualität an zwei Beispielen erläutert werden. Das erste Beispiel nimmt Bezug auf die Kegelschnitte Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel. Diese Formen entstehen, indem man einen Kegel mit einer Ebene schneidet. (s. Abb. 12) Deren Konstruktionen werden im nächsten Kapitel ausführlich beschrieben. Hier geht es darum, einen gesetzmässigen Zusammenhang, der für alle Kegelschnitte Gültigkeit hat, aufzuzeigen und zu dualisieren. Das zweite Beispiel geht der Frage des Verhältnisses von Innen und Aussen anhand von Dreiecken nach.

⁵ Locher-Ernst beschreibt die eigenartigen Verhältnisse, die sich in Bezug auf die Ebene ergeben, genauer. Siehe Locher-Ernst 2016, Kap. 4: Das Unendlichferne einer Ebene

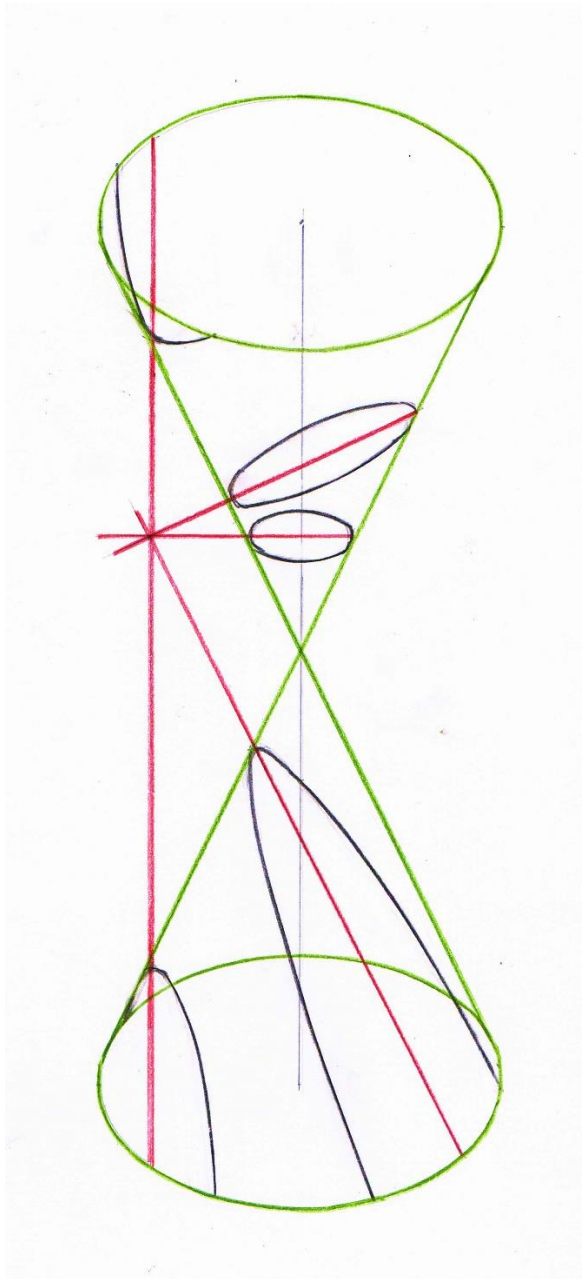


Abbildung 12

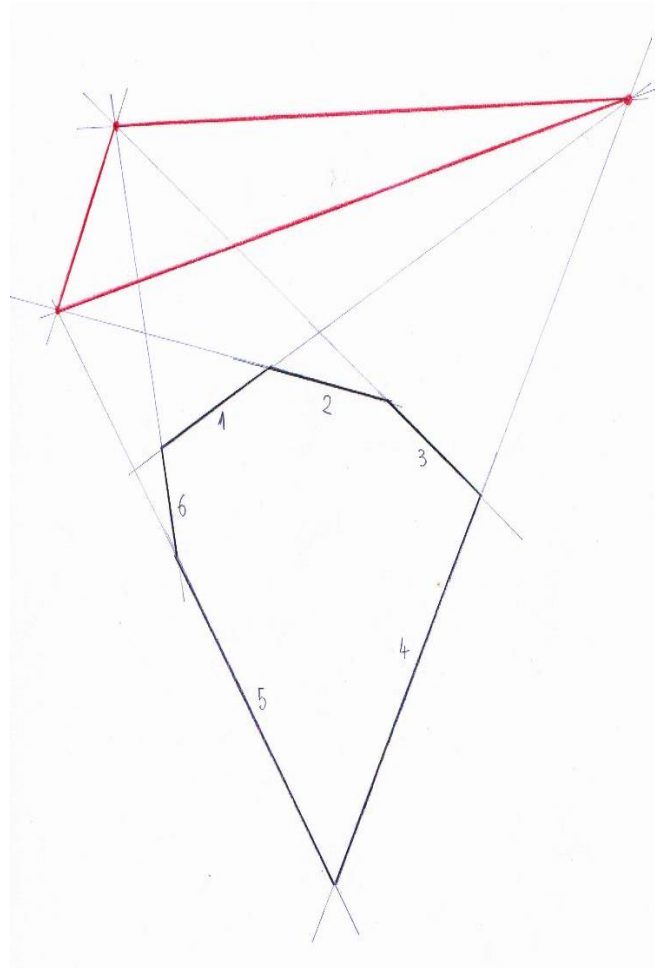


Abbildung 13

• *Eingeschriebenes und umschriebenes Sechseck*

Setzt man 5 Punkte völlig beliebig in eine Ebene, so ist damit immer genau ein Kegelschnitt festgelegt und auch exakt konstruierbar (s. Kap. 6). Setzt man nun einen sechsten Punkt willkürlich hinzu, so liegt dieser mit grosser Wahrscheinlichkeit nicht auf demselben Kegelschnitt. Hat man einmal fünf Punkte gesetzt, so ist der Kegelschnitt damit bestimmt. Will man weitere Punkte finden, die auf ihm liegen, muss man diese nach bestimmten Verfahren konstruieren, man ist nicht mehr frei in der Setzung. Eine Entdeckung, die auf Blaise Pascal⁶ zurückgeht, besagt, dass sechs in

⁶ Blaise Pascal, 1623 – 1662, veröffentlicht 1640 seine erste Abhandlung über die Kegelschnitte, in der er diesen Sachverhalt darstellt.

einer Ebene liegende Punkte dann auf einem Kegelschnitt liegen, wenn die Seiten, die sich durch Verbindung der Punkte ergeben, in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen. Nummeriert man die so entstehenden Verbindungsgeraden in der Reihenfolge, in der man sie durchläuft, um zum Ausgangspunkt zurück zu kommen, so ergeben sich drei Paare von jeweils gegenüberliegenden Seiten, Nummer eins und vier, zwei und fünf sowie drei und sechs. Man hat verschiedene Möglichkeiten der Nummerierung, es ist nur wichtig, dass das Sechseck geschlossen ist, dass man also zum Ausgangspunkt zurückkommt und dass jede Ecke einmal durchlaufen wird. Wenn nun die verbundenen Punkte auf einem Kegelschnitt liegen, so liegen die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten auf einer Geraden. Andernfalls bilden die drei Schnittpunkte ein Dreieck (Abb. 13). Die Abbildungen 14 bis 17 zeigen verschiedene Möglichkeiten.

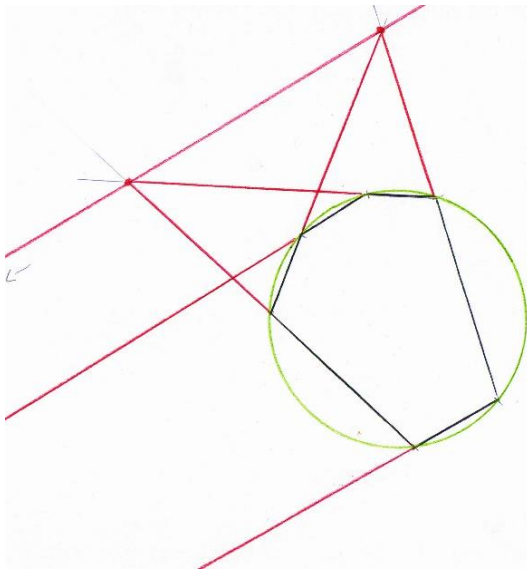


Abbildung 14

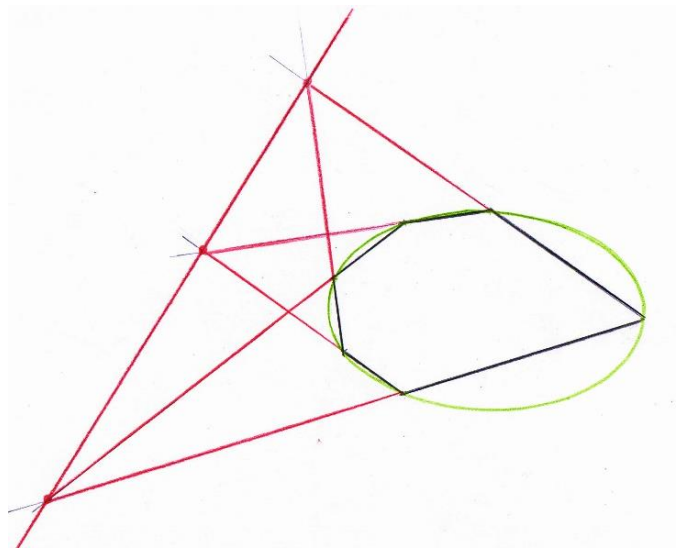


Abbildung 15

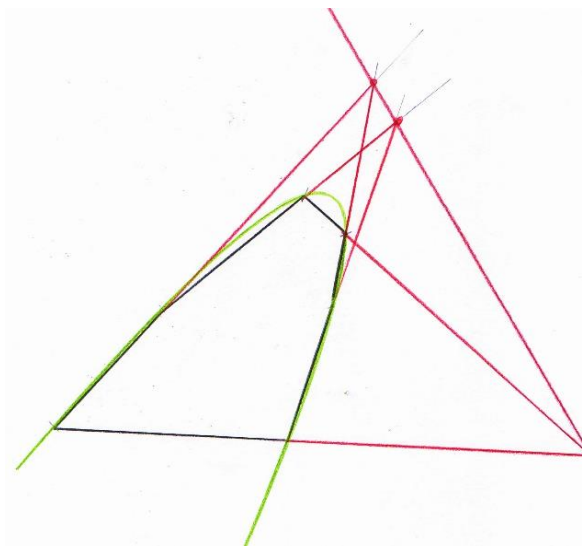


Abbildung 16

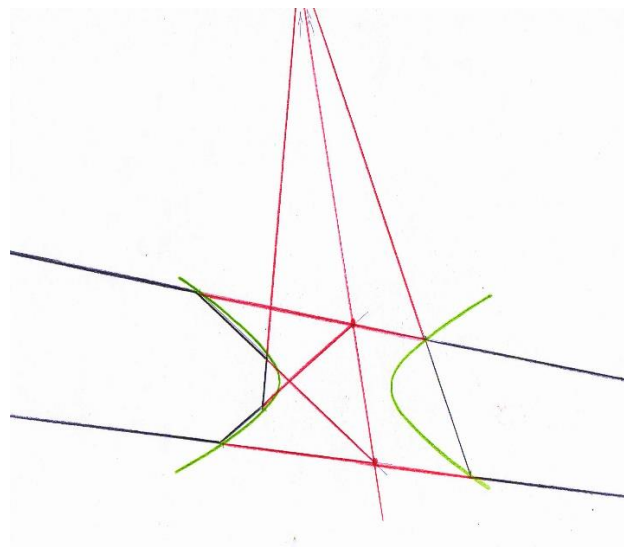


Abbildung 17

Abb. 13 zeigt diese Situation: Die sechs Punkte liegen nicht auf einem Kegelschnitt; verbindet man die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten, so ergibt das ein Dreieck. Es folgen eine Reihe von Beispielen, wo die Punkte einem Kegelschnitt angehören. Beim Kreis von Abb. 14 sind zwei Schnittpunkte einander zugeordneter Seiten sichtbar, der dritte ist der Fernpunkt der durch die beiden Schnittpunkte gekennzeichneten Geraden. Bei den folgenden drei Beispielen (Ellipse, Parabel und Hyperbel) sind jeweils alle Schnittpunkte im Endlichen. Nun besteht keine Notwendigkeit, die Ecken in der Reihenfolge zu verbinden, in der man sie antrifft, wenn man den Kegelschnitt durchläuft. Jede Reihenfolge in der Verbindung der Ecken, die einen geschlossenen Zug ergibt, ist möglich, die Geraden dürfen sich dabei auch überschneiden. Dadurch werden die Konstruktionsmöglichkeiten vielschichtig und interessant. Die folgenden Abbildungen verdeutlichen das Gemeinte. Abb. 18 bis 20 zeigen drei Beispiele, in denen sechs Punkte jeweils gleichmässig auf einem Kreis angeordnet wurden. Im ersten Fall (Abb. 18) sind die sechs Ecken so miteinander verbunden, wie man es gewohnt ist. Einander zugeordnete, gegenüberliegende Seiten sind parallel, schneiden sich also auf der Ferngeraden. Abb. 19 zeigt eine andere Verbindungsmöglichkeit der Ecken, hier schneidet die Gerade, auf der sich die Schnittpunkte versammeln, die sogenannte Pascal-Gerade den Kegelschnitt. Abb. 20 zeigt eine weitere Möglichkeit, hier ist die Pascal-Gerade wiederum die Ferngerade. Zur Verdeutlichung wurden weitere Beispiele an der Hyperbel hinzugefügt. In allen drei Fällen wurden die Punkte auf den Hyperbeln in gleicher Weise verteilt. In Abb. 23 sind zwei der drei Schnittpunkte sichtbar, der dritte ist ziemlich weit aussen liegend. In den Abbildungen 21 und 22 sind alle Schnittpunkte auf der Pascal-Gerade sichtbar.⁷

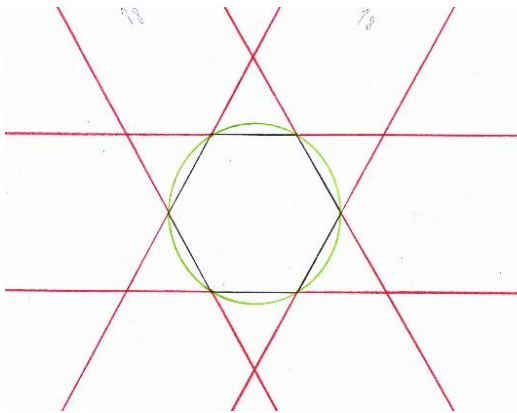


Abbildung 18

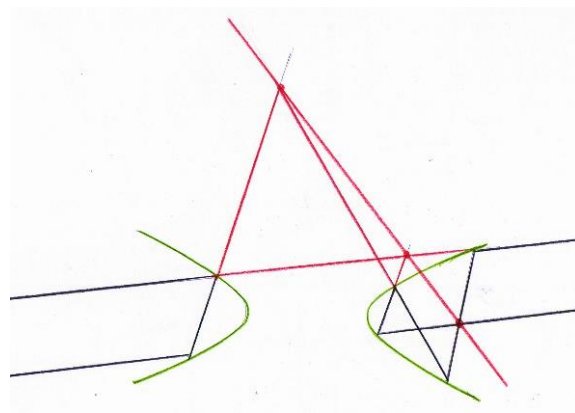


Abbildung 21

⁷ Bei einer gegebenen Anordnung von sechs Punkten auf einem Kegelschnitt gibt es 60 Möglichkeiten, diese zu verbinden und damit ebenso viele Möglichkeiten für die Lage der Pascal-Gerade, wobei einige dieser Möglichkeiten auch zusammenfallen können. Es gibt verschiedene Wege, sich diesen Sachverhalt klar zu machen. Olive Whicher hat in ihrem Buch über projektive Geometrie die verschiedenen Möglichkeiten am Beispiel des Kreises herausgearbeitet und dargestellt (vgl. Whicher, 1970, S. 68). Wenn es nur um die Anzahl geht, kann man natürlich auch kombinatorisch vorgehen. Ich habe sechs Möglichkeiten, aus sechs gegebenen Punkten einen auszuwählen, für den zweiten Schritt bleiben mir dann noch fünf Möglichkeiten, für den dritten vier, usw. So ergeben sich $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$ Möglichkeiten. Da es aber für die Lage der Pascal-Gerade keine Rolle spielt, von welchem Punkt aus ich starte und in welche Richtung ich die Figur durchlaufe, so ergeben sich $720 : 12 = 60$ Möglichkeiten (vgl. Bernard 1984, S. 143).

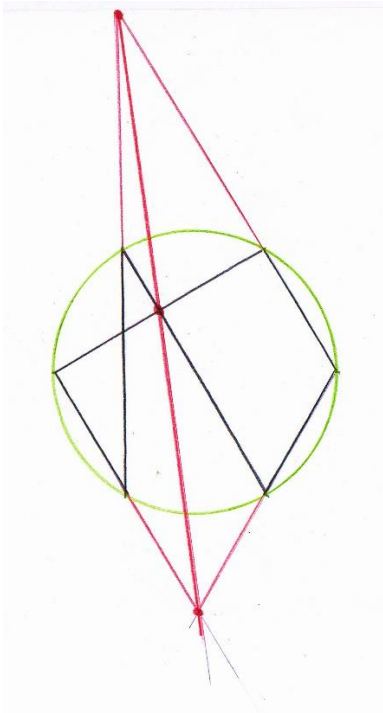


Abbildung 19

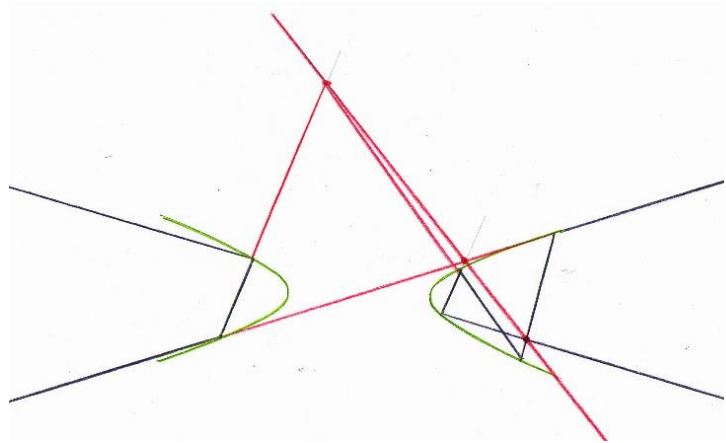


Abbildung 22

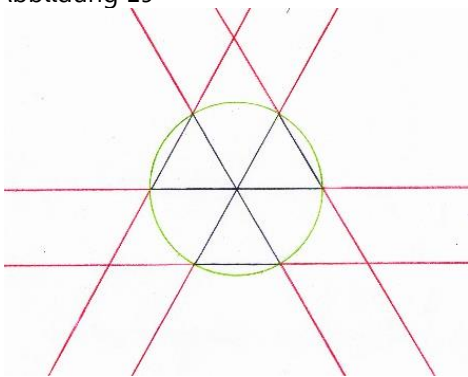


Abbildung 20

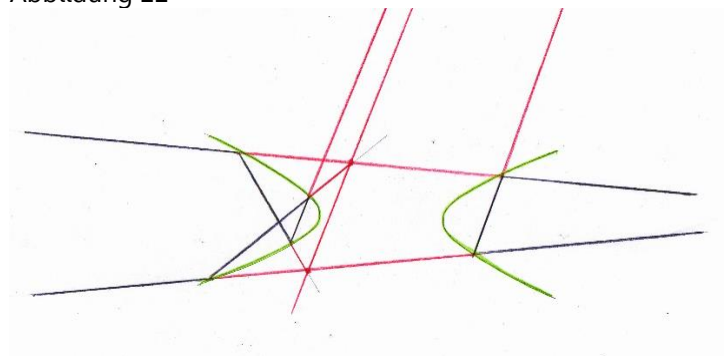


Abbildung 23

Eine Entdeckung, die zu dem Satz von Pascal dual ist, geht auf den Mathematiker Brianchon zurück.⁸ Sechs Geraden, die allesamt Tangenten an ein und denselben Kegelschnitt sind, zeichnen sich wiederum durch eine charakteristische Eigenschaft aus. Dazu muss gesagt werden, dass ein Kegelschnitt nicht nur durch fünf Punkte, sondern auch durch fünf Geraden, die in einer Ebene liegen bestimmt ist. Egal wie ich die fünf Geraden lege, es lässt sich immer ein und nur ein Kegelschnitt konstruieren, an den sich diese fünf Geraden als Tangenten schmiegen. Wenn ich eine sechste Gerade willkürlich hinzufüge, so wird sie in den allermeisten Fällen nicht demselben Kegelschnitt als Tangente angehören. Wenn es aber so ist, dass die sechs Seiten einen Kegelschnitt umschreiben, so geht die Verbindungslinie gegenüberliegender Ecken durch einen Punkt. Um sich das klar zu machen, kann man ähnlich vorgehen, wie oben beschrieben: man nimmt ein beliebiges Sechseck und nummeriert die Ecken. Dann verbindet man die Ecken eins und vier, zwei und fünf sowie drei und sechs. Normalerweise werden sich bei sechs willkürlich gewählten Seiten die Verbindungsgeraden nicht in einem Punkt schneiden, sondern ein Dreieck bilden (s. Abb. 24). Tun

⁸ Charles Julien Brianchon, 1783 – 1864, veröffentlichte diesen nach ihm benannten Satz 1806.

sie dies aber, so gehören die ursprünglichen sechs Geraden ein und demselben Kegelschnitt an. Die Abbildungen 25 bis 28 zeigen wiederum Beispiele. Zunächst sind ein Kreis, eine Ellipse, eine Parabel und eine Hyperbel mit je einem umschriebenen Sechsseit⁹ dargestellt. Die Verbindungsgerade gegenüberliegender Ecken läuft durch einen Punkt, den Brianchonschen Punkt. Auch das Sechsseit kann auf vielfältige Weise durchlaufen werden. Es ist nicht notwendig, um von einer Seite zur nächsten zu gelangen, immer den nächstliegenden Schnittpunkt von zwei Seiten zu verwenden. Man muss die sechs Seiten lediglich so durchlaufen, dass man keine auslässt, keine doppelt verwendet und schliesslich zum Ausgangspunkt zurückkehrt. Anders gesagt: von den fünf Schnittpunkten, die die fünf Geraden auf der jeweils sechsten erzeugen, verwendet man immer nur zwei. Die Abbildungen 29 bis 34 zeigen Beispiele des Gemeinten. Abb. 29 zeigt ein gleichmässig einem Kreis umschriebenes Sechsseit. Der Brianchonsche Punkt ist in diesen Fall identisch mit dem Kreismittelpunkt. In den Abbildungen 30 und 31 haben die Tangenten an den Kreis die exakt gleiche Lage, nur wurden eben jeweils andere Schnittpunkte verwendet, um das umschriebene Sechseck zu durchlaufen. Der Sechseckszug muss also nicht notwendig konvex sein, er kann die verschiedensten Gestalten annehmen. Es ist sowohl möglich, dass sich Seiten überschneiden als auch das einige der Ecken nach innen gerichtet sind. Die von Brianchon entdeckte Gesetzmässigkeit gilt unverändert, variabel ist die Lage des Schnittpunktes. In Abb. 30 ist er aus dem Kreismittelpunkt herausgewandert, liegt aber noch im Innern des Kreises, in Abb. 31 ist er ausserhalb des Kreises, gleichzeitig läuft eine Seite durch die Unendlichkeit. Die Abbildungen 32 bis 34 zeigen drei Beispiele an einer Ellipse. Auch hier ist die Lage der Tangenten in den drei Fällen gleich, die Verschiedenheit ergibt sich durch die unterschiedlichen Möglichkeiten, das Sechsseit zu durchlaufen.¹⁰

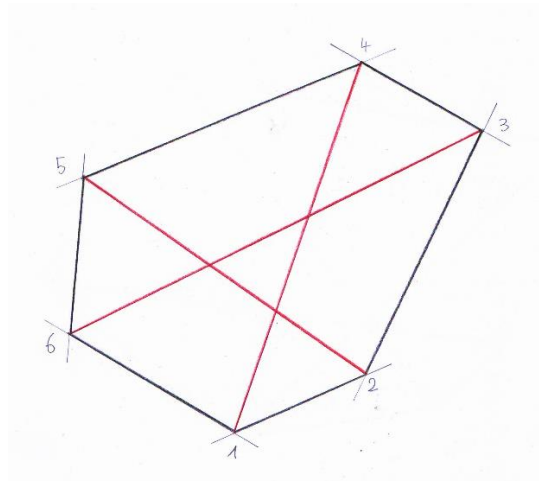


Abbildung 24

⁹ Ich verwende hier den Ausdruck Sechsseit im Gegensatz zu Sechseck, um zu betonen, dass die Figur ausgehend von sechs Geraden erzeugt wird und nicht ausgehend von sechs Punkten.

¹⁰ Auch bei sechs gegebenen Tangenten an einen Kegelschnitt gibt es 60 unterscheidbare Möglichkeiten, einen sechseckigen geschlossenen Zug zu erhalten.

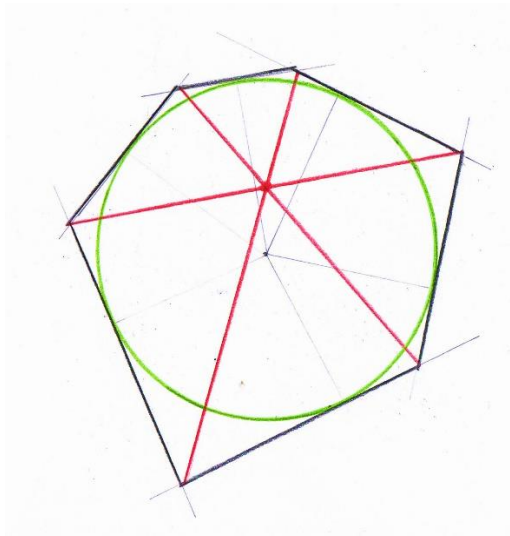


Abbildung 25

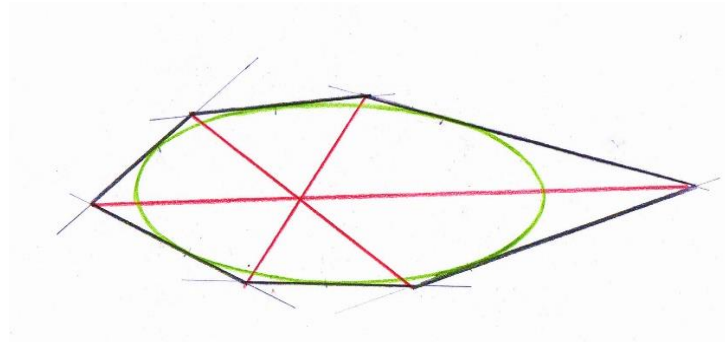


Abbildung 26

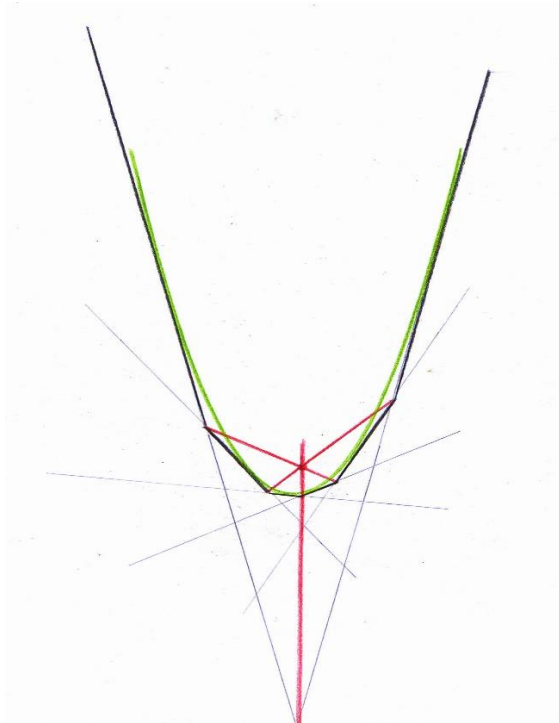


Abbildung 27

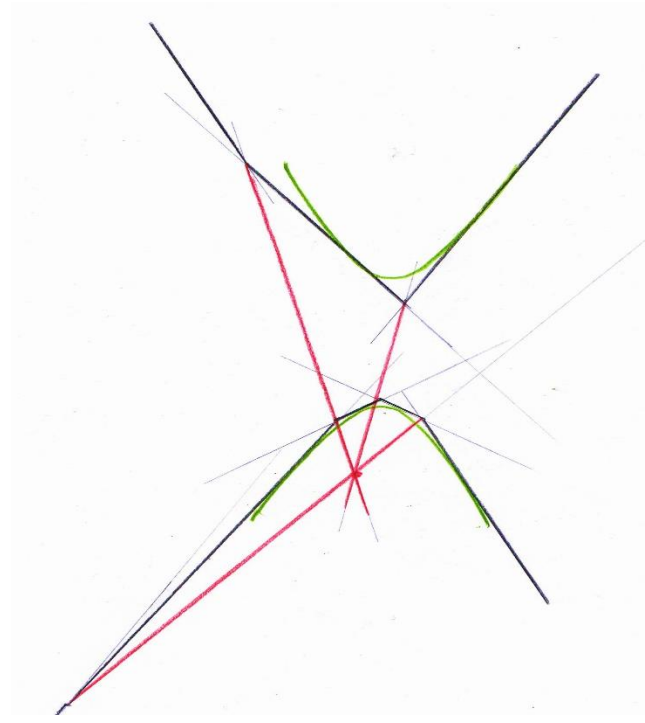


Abbildung 28

Diese Beispiele zeigen anschaulich die zueinander dualen Verhältnisse: in dem einen Fall blickt man auf ein einem Kegelschnitt eingeschriebenes Sechseck, dessen Eckpunkte ihm angehören. Die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten liegen auf einer Geraden. Im anderen Fall hat man es mit einem dem Kegelschnitt umschriebenen Sechseck zu tun, die Seiten sind seine Tangenten. Verbindet man gegenüberliegende Ecken miteinander, so schneiden sich die drei Verbindungsgeraden in einem Punkt. Drei Punkte auf einer Geraden einerseits und drei Geraden durch einen Punkt andererseits, das ist wiederum eine Dualität. Man kann empfinden, dass diese Harmonie von eigenartiger Schönheit ist. Die beiden dualen Erscheinungsformen sind von der gleichen

Gesetzmässigkeit durchzogen, was sich am eindrucklichsten darin zeigt, dass die Anzahl der möglichen Pascal-Geraden und die Anzahl der möglichen Brianchonschen Punkte gleich ist und – was letztlich gleichbedeutend ist – dass sowohl die Sechsecke als auch die Sechsecke eine Vervielfältigung ihrer Bildungsmöglichkeiten erfahren.

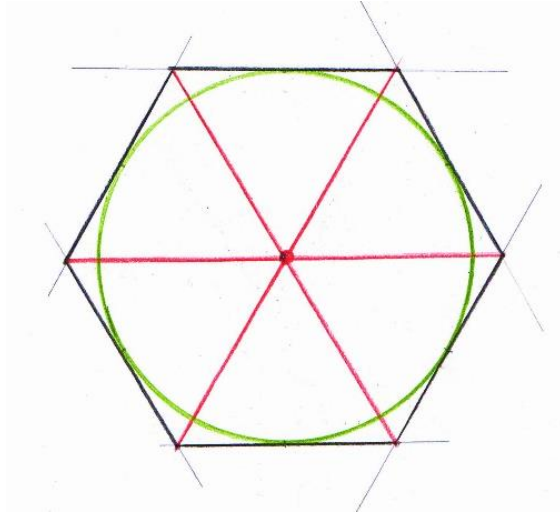


Abbildung 29

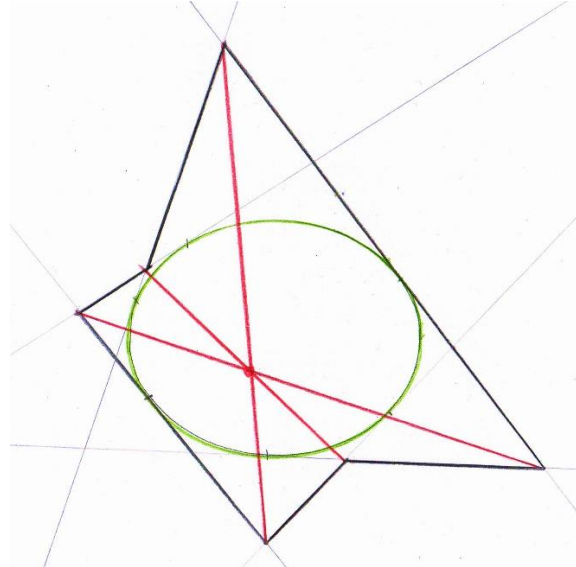


Abbildung 32

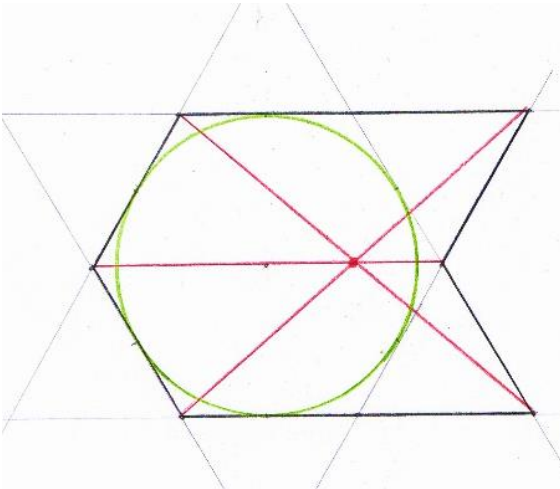


Abbildung 30

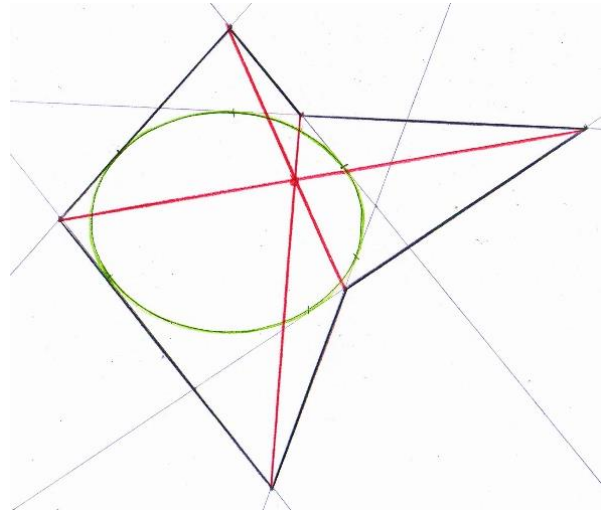


Abbildung 33

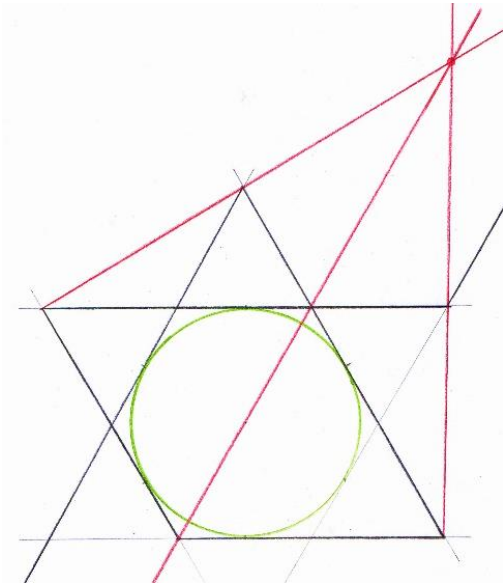


Abbildung 31

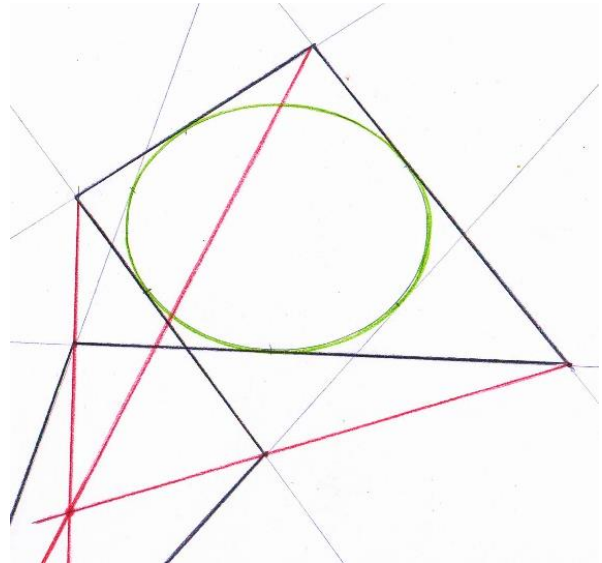


Abbildung 34

• Kerne und Hüllen

Die oben beschriebenen Beispiele zeigen, dass zu einer Kurve sowohl die auf ihr liegenden Punkte als auch die sie berührenden Tangenten gehören. Die Kreislinie zum Beispiel ist ein in sich geschlossenes Gebilde, das ich als solches betrachten kann. Ebenso gut kann ich die Aufmerksamkeit auf die Summe aller Punkte richten, die sich auf ihr befinden oder auf die Summe aller Tangenten, die die Kreislinie in je einem Punkt berühren. Während ich die Punkte dadurch ermitteln kann, dass ich alle diejenigen heraushebe, die einen bestimmten gleichen Abstand vom Mittelpunkt haben, bin ich geneigt, die Tangenten anders zu erfassen. Ich erlebe sie von der Gebärde her eher als einhüllend, sozusagen von aussen die Kurve umfahrend. Im Folgenden soll – anhand eines Beispiels – der Frage des Verhältnisses von Innen und Aussen nachgegangen werden. Dazu gibt die projektive Geometrie Anlass, denn wenn ich Geraden oder Ebenen in ihrer ganzen Ausdehnung betrachte, so sind damit in Bezug auf die Charakterisierung von Innen und Aussen Probleme verbunden, die ich nicht habe, wenn ich mich von vorn herein auf einen Ausschnitt, auf eine Strecke oder eine Fläche von bestimmter Grösse beschränke. Bei dem Dreieck in Abb. 35 dürften sich keine Schwierigkeiten ergeben, wenn man den Innenbereich bezeichnen soll. Die Figur ist begrenzt durch drei Geraden, von denen sich je zwei in einer Ecke des Dreiecks treffen. Von den Geraden betrachte ich nur die Ausschnitte, die zwischen den Ecken liegen. Der Innenbereich ist ein endlich begrenzter, dreieckiger Ausschnitt aus der Ebene, in der das Dreieck liegt, derjenige, in den in der Zeichnung ein roter Punkt gesetzt ist. Man sieht es direkt. Den Rest der Ebene, die Umgebung des Dreiecks empfindet man natürlicherweise als Aussen. Wie ist es nun, wenn ich die drei Geraden, die das Dreieck bilden, in ihrer ganzen Ausdehnung betrachte (S. Abb. 36)

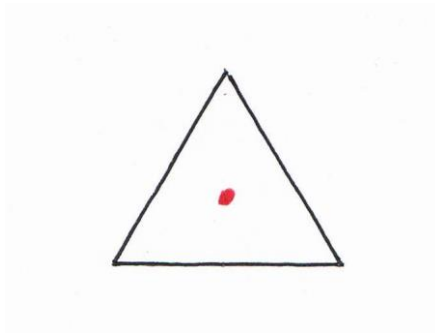


Abbildung 35

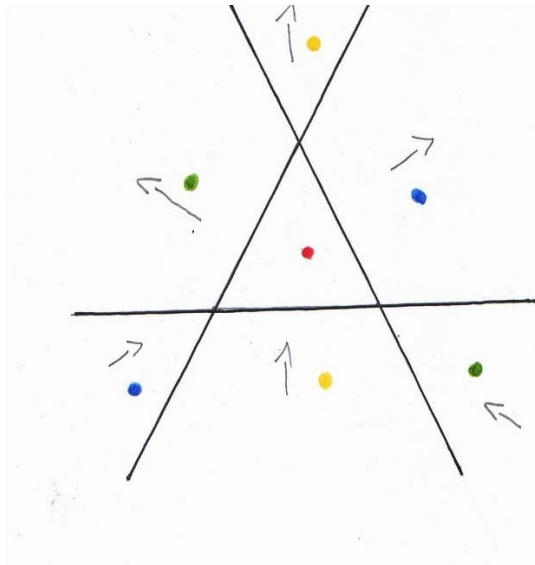


Abbildung 36

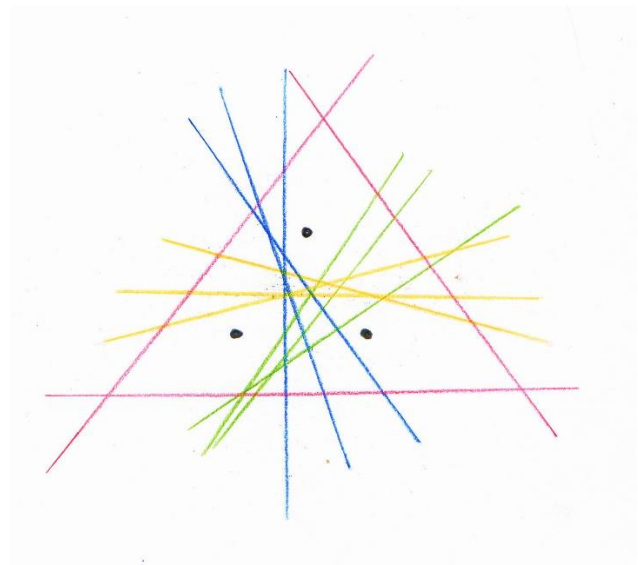


Abbildung 37

Man wird nicht darüber im Zweifel sein, dass wiederum der endlich begrenzte Bereich, der mit dem roten Punkt gekennzeichnet ist, ein Innenbereich ist. Wie steht es nun mit dem Rest der Ebene? Das Gebiet oben links, in das ein grüner Punkt gesetzt ist, ist ebenso gut von den drei Geraden des Dreiecks begrenzt. Nehmen wir an, der grüne Punkt dürfte sich in seinem Gebiet überall dort hinbewegen, wo er hinkann, ohne eine der Dreiecksgeraden zu überspringen. Der Durchgang durch die Unendlichkeit ist kein Hindernis für ihn, da die Ferngerade nicht eine Gerade des Dreiecks ist. Sie behindert den grünen Punkt gerade so wenig, wie irgendeine andere, beliebig liegende Gerade. Er kann also z. B. nach oben links, dem Pfeil folgend, laufen, die Unendlichkeit durchqueren und von unten rechts her wieder in die Sichtbarkeit treten. Entsprechendes gilt für den blauen und auch für den gelben Punkt. Auch der rote Punkt kann sich überallhin bewegen, wo er eben hinkommt, ohne eine der Dreiecksgeraden zu überspringen. Der einzige Unterschied besteht darin, dass dieses Gebiet im Endlichen begrenzt ist. Es liegt gänzlich auf dem Blatt und seine Fläche könnte berechnet werden. In dem Moment, wo man sich nicht um messbare Abstände kümmert, unterliegen alle vier Punkte der gleichen Bewegungseinschränkung, die durch die Seiten des Dreiecks bestimmt ist. Für alle Punkte stellen diese drei Geraden unüberwindliche Grenzen dar. Ihre Beweglichkeit ist also in jedem Fall nach der gleichen Gesetzmässigkeit bestimmt. Aus dieser Sicht ergibt sich keine Bevorzugung von einem der vier Bereiche gegenüber einem anderen. Bezeichnet man den Bereich, in den der rote Punkt gesetzt ist als Innenbereich, so stellen die

anderen Bereiche in gleicher Weise ein Innen dar. Man kann das Problem aber auch noch anders angehen, indem man feststellt, dass Innen und Aussen keine absoluten Eigenschaften einer Form sind, sondern immer in Bezug auf etwas festgelegt werden. Louis Locher-Ernst hat diesen Sachverhalt aufgegriffen und eine neue Form der Charakterisierung gefunden. Er unterscheidet in seinen Schriften zwischen Kerngebieten und Hüllbereichen.¹¹ Ein Dreieck hat oder man kann auch sagen, es erzeugt vier Kerngebiete, eben diejenigen, die wir soeben betrachtet haben. Die vier Kerngebiete überdecken zusammen einmal die ganze Ebene, in der das Dreieck liegt. In der linken Spalte der Abb. 38 sind diese Kerngebiete nochmals veranschaulicht. Von keinem dieser Gebiete kann man sagen, dass es das Dreieck umhüllt. Die Art und Weise, wie sie entstanden sind und betrachtet werden, eröffnet die Möglichkeit der Dualisierung. Ich kann ebenso gut die Bewegungsmöglichkeiten von Geraden betrachten in Bezug auf die drei Punkte, die die Ecken des Dreiecks darstellen. Bei dieser Betrachtungsweise spielen die Seiten des Dreiecks keine Rolle, lediglich die Ecken werden berücksichtigt. Nimmt man die Gerade, die sich in Bezug auf die Ecken bewegen soll, wiederum in ihrer ganzen Ausdehnung, so ergeben sich grundsätzlich vier Möglichkeiten, wie diese gesetzt werden kann, die nicht ineinander überzuführen sind, ohne einen der Punkte zu überstreichen. Sie kann so liegen, dass sie keinen der drei Punkte von den beiden anderen abtrennt, (Abb. 38 mittlere Spalte oben) oder sie kann je einen Punkt von den beiden anderen trennen, wie man in den folgenden Abbildungen der mittleren Spalte sieht. In allen Fällen hat die Gerade bestimmte Bewegungsmöglichkeiten, die sich dadurch ergeben, dass nun die Punkte unüberwindliche Hindernisse sind. Die Gerade darf bei ihrer Bewegung die Punkte berühren, aber nicht über sie hinwegspringen. Die Bereiche, die sie unter diesen Bedingungen jeweils überstreichen kann, sind in der rechten Spalte von Abbildung 38 dargestellt. Man sieht, dass die Bereiche rechts und die Gebiete links einander zugeordnet sind. Der Hüllbereich rechts oben lässt genau den Teil der Ebene frei, der von dem Kern links oben ausgefüllt ist. Entsprechendes gilt für die jeweils linken und rechten Abbildungen in derselben Zeile. Jeder Kern hat eine zugehörige Hülle und beide gemeinsam füllen die Ebene einmal vollständig aus. Wir haben also die Hüllbereiche gefunden, indem wir die Bewegungsmöglichkeiten von Geraden in Bezug auf Punkte ermittelt haben. Umgekehrt ergeben sich die Kerngebiete durch die Bewegung von Punkten in Bezug auf Geraden.

¹¹ Vgl. z. B. Locher Ernst 1970, Kap. 7: Ebene Hüllen und Kerne

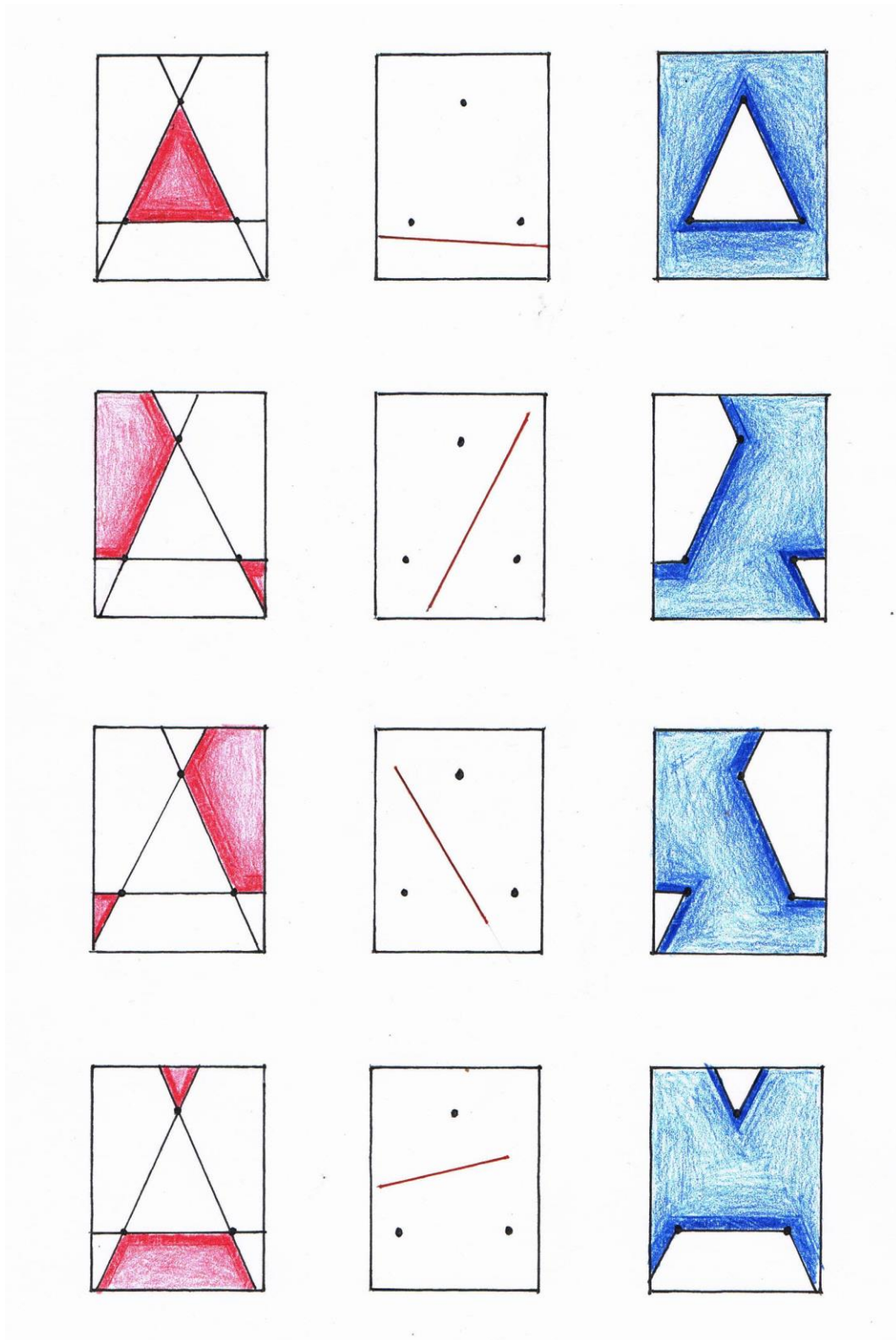


Abbildung 38

Zunächst wird man geneigt sein, die Kerngebiete eher mit dem Innen und die Hüllbereiche eher mit dem Aussen in Beziehung zu bringen. Das hängt damit zusammen, dass es viel eher unserer Gewohnheit entspricht, einen Punkt durch Geraden begrenzt zu denken als umgekehrt eine Gerade begrenzt durch Punkte. Wir leben seit langer Zeit in einer Zivilisation, die die Identifizierung des Bewusstseins mit dem Punkt erleichtert, die aber bisher noch nicht in gleicher Weise dazu auffordert, eine Identifizierung mit einem mindestens in einer Richtung unendlich ausgedehnten Element wie einer Geraden zu vollziehen. Etwas auf den Punkt zu bringen ist uns geläufig. Sollen wir etwas in die Ausdehnung bringen, so haben wir Angst uns darin zu verlieren. Wollen wir vollständig dualisieren, so müssen wir aber jetzt unterscheiden, ob wir aus der Sicht des Punktes oder aus der Sicht der Geraden sprechen. Aus der Perspektive des Punktes ist es klar: überall dort, wo er nicht hingelangen kann, ist Aussen, das ihm zugängliche Gebiet ist ein Inneres. Warum sollte es aus der Sicht der Geraden anders sein? Der Bereich, in dem sie sich bewegen kann, ist für sie das Innen, das ihr unzugängliche Gebiet ist aussen. Insofern sind die Begriffe Kern und Hülle auch nicht identisch mit Innen und Aussen. Die Kerne sind Punktgebiete, die Hüllen Strahlenbereiche, was davon als Innen oder als Aussen aufgefasst wird, ist nochmals abhängig von dem Gesichtspunkt, den man einnimmt.

Betrachtet man nur die Kerngebiete, so fällt auf, dass alle vier Kerne zusammen die Ebene einmal vollständig überdecken. Sie überlappen sich dabei nicht. Wie ist es mit den Hüllen? Anschaulich ist deutlich, dass die Hüllen zusammen genommen die Ebene mehr als einmal überdecken, nämlich genau dreimal. Würde man die Hüllen übereinanderlegen, so könnte man unschwer Überlappungen feststellen. Aber wir blicken eben mit einem Punktbewusstsein darauf. Wie sieht das Ganze aus der Sicht der Geraden aus? In Abbildung 37 sind alle Hüllbereiche angedeutet; die Farben der Geraden sind so gewählt, dass sie jeweils das Kerngebiet, das in Abbildung 36 mit der gleichen Farbe markiert ist, umhüllen. Auch hier ergeben sich Überlappungen, jede der Geraden eines Hüllbereiches teilt einen Teil der Ebene mit den Geraden anderer Hüllbereiche. So liegt z. B. eine rote Gerade streckenweise in einem Bereich, den auch die gelben Geraden erreichen können. Dasselbe gilt für die grünen und die blauen Geraden. Jede rote Gerade wird sich also so bewegen, dass sie Bereiche durchquert, die sozusagen der Heimatort von anders gefärbten Geraden sind. So kann auch jede Gerade der einen Farbe eine anders gefärbte schneiden. Alle in der Ebene des Dreiecks liegenden Geraden können sich begegnen, keine ist von der anderen gänzlich getrennt. Diese Begegnung ist aber keine Überlappung, das wäre es erst dann, wenn eine Gerade der einen Farbe vollständig mit einer anders gefärbten zusammenfallen könnte. Und eben das geht nicht. So haben alle roten Geraden die Begegnungsmöglichkeit mit gelben, grünen und blauen als gemeinsame Eigenschaft und entsprechendes gilt für die anders gefärbten Geraden. Alle gelben Geraden z. B. begegnen den roten, den grünen und den blauen. Durch diese gemeinsame Charakteristik unterscheiden sich alle Geraden des einen Bereichs von denen eines anderen Bereichs. Diese Eigenschaften betreffen jeweils die Geraden in ihrer Ganzheit, nicht nur einen Teilabschnitt. Jede rote Gerade kann jeder gelben, jeder grünen und jeder blauen begegnen, sie ist nicht in abgemessene Abschnitte eingeteilt, die für die Begegnung jeweils vorgesehen sind. Man kann den Sachverhalt auch so beschreiben, dass die Geraden mit gleichen Eigenschaften in der gleichen Farbe gezeichnet sind. Die Beeigenschaftung der Geraden betrifft ihre Qualität insgesamt, schon aufgrund ihrer Beweglichkeit macht es keinen Sinn, diese quantitativ aufzufassen. Aus der Sicht des Punktes überlappen sich zwar die Hüllbereiche, aus der Sicht der Geraden ergibt sich keine Überlappung, da sich jede Gruppe von Geraden in einem ihr qualitativ eigenen Bereich bewegt. Stellt man sich auf den Standpunkt der Geraden, so tritt man damit näher an die Beschaffenheit des reinen Denkens heran. Dieses hat ja die Eigenschaft, dasjenige, was sich der Vorstellung als

Nebeneinander oder Nacheinander zeigt, als Einheit von spezifischer überräumlicher und überzeitlicher Qualität zu erfassen.

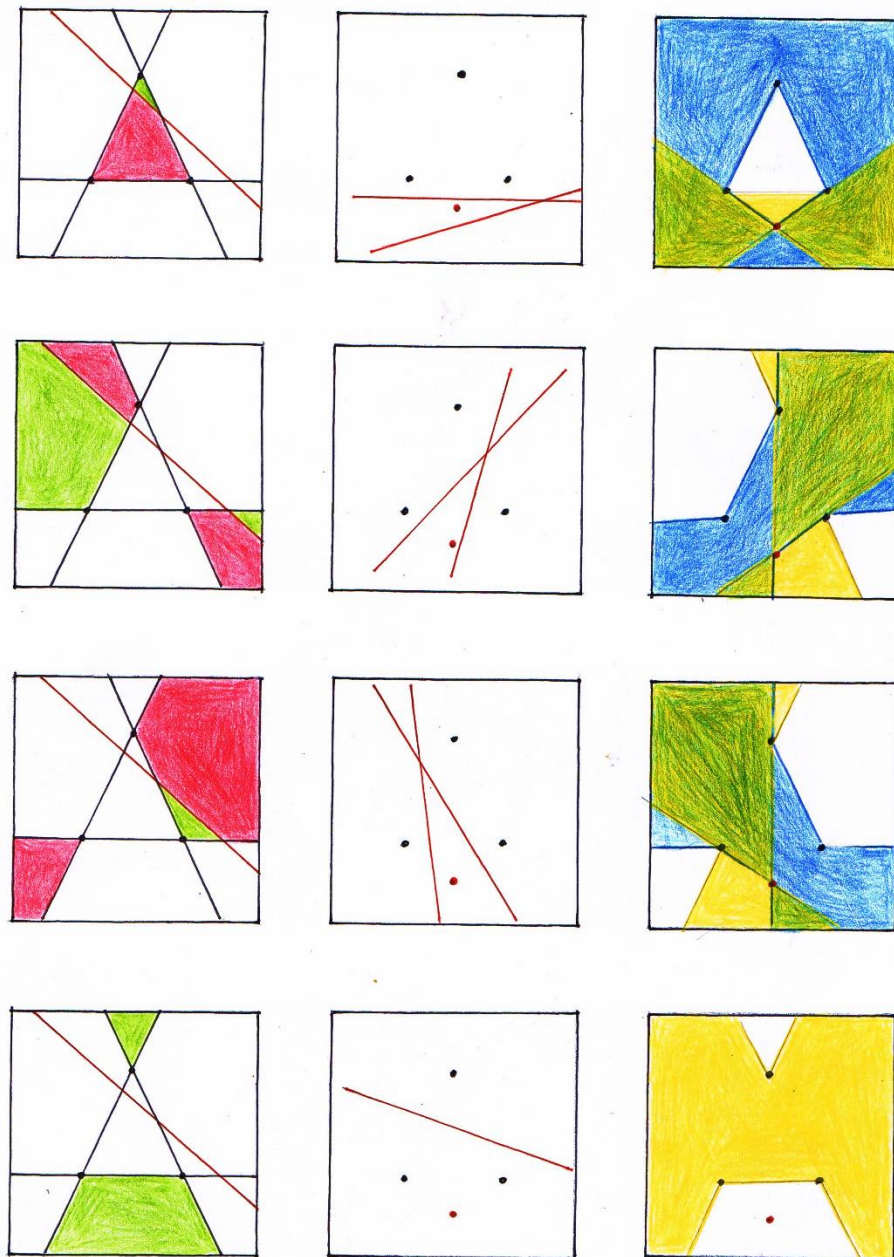


Abbildung 39

Interessant ist es, die Verhältnisse zu verfolgen, die sich ergeben, wenn man zu drei Geraden in der Ebene eine vierte hinzufügt oder dual dazu zu drei Punkten einen vierten setzt. In Abb. 39 ist dies an einem Beispiel gezeigt. Zu drei gegebenen Geraden kann ich eine vierte legen, wie ich will, sie wird immer drei der vier Punktgebiete durchlaufen und damit in zwei zerlegen und das vierte nicht. In Abbildung 39 sind die Punktgebiete und auch die Strahlenbereiche in derselben Reihenfolge dargestellt, wie in Abbildung 38. Die gewählte Gerade zerteilt die drei oberen Punktgebiete

und das vierte, untere nicht. Die zuvor dreieckigen Gebiete werden jeweils zerlegt in ein dreieckiges (grün) und ein viereckiges (rot). Durch vier in einer Ebene liegenden Geraden wird diese also in sieben Gebiete zerlegt, in vier dreieckige und drei viereckige. Setzt man zu drei Punkten einen vierten hinzu, so sind davon wiederum drei Strahlengebiete betroffen und das vierte nicht. In der mittleren Spalte von Abbildung 38 wurde der rote Punkt zu den drei schwarzen hinzugefügt. In drei der möglichen Fälle ergeben sich dadurch zwei verschiedene Lagemöglichkeiten für die den Hüllbereich überstreichende Gerade. Aus der zuvor dreiseitigen Hülle entstehen zwei, eine dreiseitige und eine vierseitige. In der rechten Spalte sind die beiden Hüllen jeweils ineinander gezeichnet, die vierseitige blau und die dreiseitige gelb. Wiederum ist der untere Hüllbereich von der Setzung des Punktes nicht betroffen. Die beiden neuentstandenen Hüllen nehmen gemeinsam den gleichen Raum in der Ebene ein, wie zuvor die entsprechende dreiseitige Hülle. Wiederum sparen die beiden Hüllen die zu ihnen gehörigen, nun auch gedoppelten, Kernbereiche aus. Das grüne Winkelfeld ergibt sich durch Überlagerung der blauen und der gelben Hülle. Hier könnte man nun von einer Überlappung sprechen, denn sowohl die Strahlen des gelben als auch die Strahlen des blauen Hüllbereichs sind in der Lage, in dem jeweiligen roten Punkt zu drehen und so das grüne Winkelfeld zu überstreichen. Die Strahlen der vierseitigen Hüllen können jeweils den blau und den grün gezeichneten Bereich überstreichen, die Strahlen der dreiseitigen Hüllen jeweils den gelb und den grün gezeichneten. Betrachtet man die Hüllen im Einzelnen, so ergibt sich durch die Hinzufügung des vierten Punktes eine Aufteilung in drei vierseitige und vier dreiseitige Hüllen.